数学演習 VII・VIII　5 月 16 日分小テスト解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

問題. 選択公理を用いて Lebesgue 可測でない集合を構成しよう. $\mathbb{R}$ の閉区間 $[0,1]$ を考える. $[0,1]$ の同値関係 $x \sim y$ を $x - y \in \mathbb{Q}$ で定め, それで得られる類別を $[0,1] = \sqcup_{\alpha \in I} C_\alpha$ と書く. 各同値類 C_α から 1 つずつ代表元 $x_\alpha \in C_\alpha$ を選ぶ (ここで選択公理を用いた). そして $N := \{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ と定める.

(1) $[-1,1] \cap \mathbb{Q}$ は可算集合なので $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ と番号づけることができる. 各 k に対し $N_k := N + r_k = \{x_\alpha + r_k \mid \alpha \in I\}$ と定める. N_k 達が互いに交わらないことを示せ.

(2) $[0,1] \subset \cup_{k=1}^{\infty} N_k \subset [-1,2]$ となることを示せ.

(3) N が Lebesgue 可測であると仮定する. Lebesgue 測度 μ が平行移動不変であることを用いて, 不等式 $1 \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(N) \le 3$ を示せ.

(4) 前問の不等式と背理法によって N が Lebesgue 可測でないことを示せ.

解答. (1) $k \neq l$ かつ $N_k \cap N_l \neq \emptyset$ と仮定すると, ある $\alpha, \beta \in I$ が存在して $x_\alpha + r_k = x_\beta + r_l$. すると $x_\alpha - x_\beta = r_l - r_k \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. 従って $\alpha \neq \beta$ かつ $x_\alpha \sim x_\beta$ となり, $C_\alpha \cap C_\beta = \emptyset$ と矛盾する.

(2) 任意の $x \in [0,1]$ に対してある $\alpha \in I$ が存在して $x \sim x_\alpha$ となるから, ある $r_k \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ が存在して $x - x_\alpha = r_k$. つまり $x \in N_k$. よって $[0,1] \subset \cup_{k=1}^{\infty} N_k$.
また $N \subset [0,1]$ と $\{r_k\} \subset [-1,1]$ から $\cup_{k=1}^{\infty} N_k \subset [-1,2]$.

(3) (1) と μ の完全加法性及び平行移動不変性から $\mu(\cup_{k=1}^{\infty} N_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(N_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(N)$. 一方で単調性から $\mu([0,1]) \le \mu(\cup_{k=1}^{\infty} N_k) \le \mu([-1,2])$. この 2 つと $\mu([a,b]) = b - a$ から結論を得る.

(4) $\mu(N) = 0$ と $\mu(N) > 0$ のどちらを仮定しても (3) の不等式と矛盾する.

コメント. $1 + 1 + 2 + 1$ 点で採点しました. 平均点は 2.3 点でした.

(4) で “$N \subsetneq [0,1]$ より $\mu(N) < 1$” としている答案が幾つかありましたが, これは正しくなくて, $\mu(N) \le 1$ しか言えません. 例えば $[0,1) \subsetneq [0,1]$ ですが $\mu([0,1)) = \mu([0,1]) = 1$ です.

以上です.

[*1] 2019/05/16 版, ver. 0.1.