数学演習 VII・VIII　5 月 16 日分解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

5　曲線と曲面の幾何 1 (曲率)

行列ないしベクトル X の転置を ${}^T X$ でその表すことにする.

5.1　平面曲線のパラメータ表示

問題 5.1. C は半径 R の円.

(1) $\gamma'(t) = {}^T(-R\sin t, R\cos t)$, $\gamma''(t) = {}^T(-R\cos t, -R\sin t)$.
(2) $L(C) = \displaystyle\int_0^{2\pi} R\,dt = 2\pi R$.
(3) $\widetilde{\gamma}'(s) = {}^T(-\sin(s/R), \cos(s/R))$ より任意の s に対し $|\widetilde{\gamma}'(s)| = 1$ なので, $\widetilde{\gamma}$ は C の弧長パラメータ表示.

問題 5.2. $s = \displaystyle\int_0^t |\gamma'(u)|\,du$ より $\dfrac{ds}{dt} = |\gamma'(t)|$. 従って

$$\widetilde{\gamma}'(s) \;=\; \frac{d\widetilde{\gamma}}{ds} \;=\; \frac{d\widetilde{\gamma}}{dt}\frac{dt}{ds} \;=\; \gamma'(t)\frac{1}{|\gamma'(t)|}$$

となり, $|\widetilde{\gamma}'(s)| = 1$ が分かる.

問題 5.3. $\gamma(s) = {}^T\big(x(s), y(s)\big)$ とすると仮定から $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$. 両辺を s で微分して

$$x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s) \;=\; 0.$$

一方で $\gamma'(s) = {}^T\big(x'(s), y'(s)\big)$ と $\gamma''(s) = {}^T\big(x''(s), y''(s)\big)$ より

$$\gamma'(s)\cdot\gamma''(s) \;=\; x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s).$$

従って $\gamma'(s)\cdot\gamma''(s) = 0$ となり. $\gamma'(s) \perp \gamma''(s) = 0$ が分かる.

5.2　平面曲線の曲率

問題 5.4. C の弧長パラメータ表示 $\widetilde{\gamma}(s) = {}^T\big(R\cos(s/R), R\sin(s/R)\big)$ から

$$\widetilde{\gamma}'(s) \;=\; \begin{pmatrix} -\sin(s/R) \\ \cos(s/R) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\gamma}''(s) \;=\; \begin{pmatrix} -R^{-1}\cos(s/R) \\ -R^{-1}\sin(s/R) \end{pmatrix}$$

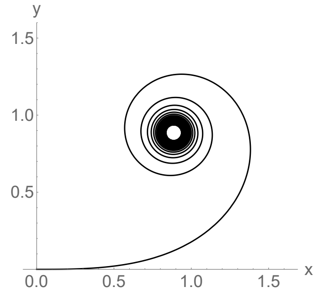
を得る. また $n(s) = {}^T\big(-\cos(s/R), \sin(s/R)\big)$ となる. よって $\widetilde{\gamma}''(s) = R^{-1}n(s)$. つまり $\kappa(s) = R^{-1}$.

[*1] 2019/05/16 版, ver. 0.2.

問題 5.5.　(1) $\gamma'(s) = {}^T\!\big(\cos s^2/2, \sin s^2/2\big)$ より $|\gamma'(s)| = 1$.

(2) $\gamma''(s) = {}^T\!\big(-s\sin s^2/2, s\cos s^2/2\big)$ と $n(s) = {}^T\!\big(-\sin s^2/2, \cos s^2/2\big)$ より $\kappa(s) = s$.

(3) $0 \le s \le 20$ の範囲で図示すると下図のようになる.



問題 5.6.　(1) $\gamma''(s) = {}^T\!\big(-\theta''(s)\sin\theta(s), \theta'(s)\cos\theta(s)\big)$, $n(s) = {}^T\!\big(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)\big)$.

(2) (1) より $\gamma''(s) = \theta'(s)n(s)$ なので $\theta'(s) = \kappa(s)$. これから $\displaystyle\int_a^b \kappa(s)ds = \int_a^b \theta'(s)ds = \theta(b) - \theta(a)$.

問題 5.7. 簡単のため弧長パラメータ s を省略して $\gamma = \gamma(s)$ などと書くことにする. $\gamma'' = \kappa n$ から $e_1' = \kappa e_2$. よって $e_2' = -\kappa e_1$ を示せば十分.

$\gamma = {}^T\!\big(x, y\big)$ とおくと, $e_1 = \gamma' = {}^T\!\big(x', y'\big)$ および $e_2 = n(s) = {}^T\!\big(-y', x'\big)$ から $e_1' = {}^T\!\big(x'', y''\big)$ と $e_2' = {}^T\!\big(-y'', x''\big)$ を得る. 既に示してある $e_1' = \kappa e_2$ から $x'' = \kappa y'$ と $y'' = -\kappa x'$ が成立するので, $e_2' = -\kappa e_1$.

問題 5.8.　(1) $\gamma(t) = (t, at + bt)$ として命題 5.2 を用いて計算すると, 曲率は常に 0.

(2) $\gamma(t) = (t, at^2 + bt + c)$ として命題 5.2 を用いて曲率を計算すると, $\kappa(t) = 2a/(1 + (2at + b)^2)^{3/2}$.
$a > 0$ なら最大値は $t = -b/2a$, つまり $(x, y) = (-b/2a, c - b^2/4a)$ での $2a$, 最小値はなし.
$a = 0$ なら常に 0.
$a < 0$ なら最小値は $(x, y) = (-b/2a, c - b^2/4a)$ での $2a$, 最大値はなし.

(3) $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$ として命題 5.2 を用いて曲率を計算すると, $\kappa(t) = ab/(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}$.
$a > b$ の場合, 最大値は $t = 0, \pi$, つまり $(x, y) = (\pm a, 0)$ での a/b^2. 最小値は $t = \pi/2, 3\pi/2$, つまり $(x, y) = (0, \pm b)$ での b/a^2,
$a = b$ の場合, 曲率は常に $1/a$.

(4) $\gamma_+(t) = (a\cosh t, b\sinh t)$, $\gamma_-(t) = (-a\cosh t, b\sinh t)$ として命題 5.2 を用いて曲率を計算すると, $\kappa_\pm(t) = \mp ab/(a^2\sinh^2 t + b^2\cosh^2 t)^{3/2}$.
最大値は $(x, y) = \gamma_-(0) = (-a, 0)$ での a/b, 最小値は $(x, y) = \gamma_+(0) = (a, 0)$ での $-a/b$.

問題 5.9. $\gamma'(t) = {}^T\!\big(1, \sinh t\big)$ より $|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t$ となる.
よって曲線の長さは $\displaystyle\int_{-1}^{1} \cosh t\, dt = [\sinh t]_{-1}^{1} = e - e^{-1}$.
また曲率は $\gamma''(t) = {}^T\!\big(0, \cosh t\big)$ から $\kappa(t) = \cosh t/\cosh^3 t = 1/\cosh^2 t$.

問題 5.10. $\gamma'(t) = {}^T\!\big(1 - \cos t, \sin t\big)$ から $|\gamma'(t)| = \sqrt{2(1 - \cos t)} = 2\sin t/2$ となる.
従って曲線の長さは $\displaystyle\int_0^{2\pi} 2\sin t/2\, dt = 8$.
また曲率は $\gamma''(t) = {}^T\!\big(\sin t, \cos t\big)$ から $\kappa(t) = (\cos t - 1)/(2\sin t/2)^3 = -1/(4\sin t/2)$.

5.3 空間曲線の曲率

問題 5.11. パラメータ t を省略して $A = A(t)$, $e = e(t)$ などと書くことにする.

(1) $|e| = 1$ より $e \cdot e = 1$. これを微分して $e' \cdot e = 0$, つまり $n \cdot e = 0$ となるので, e と n は直交する. $b = e \times n$ なので, b は e および n と直交する. また $|e| = 1$ と $|n| = 1$ から $|b| = 1$. よって ${}^{T}AA = I_3$, つまり A は直交行列. 特に A は逆行列 A^{-1} を持つ. すると $B = A^{-1} \cdot \frac{d}{dt}A$ となって B は well-defined.

(2) 直交行列なので $A^{-1} = {}^{T}A$. よって ${}^{T}AA = A^{-1}A = I_3$. この式を t で微分して

$$A^{-1}\tfrac{d}{dt}A + {}^{T}\big(\tfrac{d}{dt}A\big)A \,=\, 0.$$

(1) の議論より $B = A^{-1} \cdot \frac{d}{dt}A$ なので ${}^{T}B = {}^{T}\big(\frac{d}{dt}A\big) \cdot {}^{T}\big(A^{-1}\big) = {}^{T}\big(\frac{d}{dt}A\big)A$. よって $B + {}^{T}B = 0$.

(3) 方程式 $\frac{d}{dt}A = AB$ から $(e', n', b') = (e, n, b)B$, 特に $e' = eB_{11} + nB_{21} + bB_{31}$. e' と n は平行であり, また $e, b \perp n$ なので $B_{11} = B_{31} = 0$. (2) より B は歪対称なので $B_{13} = B_{31} = 0$.

問題 5.12. 簡単のためパラメータ t を省略して $\gamma = \gamma(t)$ などと書く. $\gamma' = {}^{T}\big(-a\sin t, a\cos t, b\big)$ より $e = {}^{T}\big(-a\sin t, a\cos t, b\big)/\sqrt{a^2+b^2}$. すると $e' = {}^{T}\big(-\cos t, -\sin t, 0\big) \cdot a/\sqrt{a^2+b^2}$ となるから $n = e'/|e'| = {}^{T}\big(-\cos t, -\sin t, 0\big)$. よって曲率は

$$\kappa \,=\, (a/\sqrt{a^2+b^2})/\sqrt{a^2+b^2} \,=\, a/(a^2+b^2).$$

また $b = e \times n = {}^{T}\big(b\sin t, -b\cos t, a\big)/\sqrt{a^2+b^2}$, $b' = {}^{T}\big(b\cos t, b\sin t, 0\big)/\sqrt{a^2+b^2}$ と $b' = -\tau n$ から捩率は

$$\tau \,=\, b/(a^2+b^2).$$

問題 5.13. $e = \gamma'$, $n = \gamma''/|\gamma''|$ と Frenet-Serret 公式より $\kappa = |\gamma''|$. すると $b = e \times n = \gamma' \times \gamma''/|\gamma''|$ から

$$b' \,=\, \gamma' \times \gamma'''/|\gamma''| - (\gamma' \times \gamma'')\gamma'''/|\gamma''|^2.$$

一方で Frenet-Serret 公式より

$$b' \,=\, -\tau n \,=\, -\tau\gamma''/|\gamma''|.$$

よって内積 (b', γ'') を 2 通りに計算すると

$$(\gamma' \times \gamma''', \gamma'')/|\gamma''| \,=\, -\tau|\gamma''|.$$

左辺は $-\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')/|\gamma''|$ なので, $\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = \tau|\gamma''|^2 = \tau\kappa^2$ を得る.

問題 5.14. (1) 直接計算で

$$\frac{dA}{dt} \,=\, AB, \quad B_{21} \,=\, -B_{12} \,=\, a/c \,=\, \kappa, \quad B_{32} \,=\, -B_{23} \,=\, b/c \,=\, \tau.$$

(2) $\kappa(t) = B_{21}/|\gamma'(t)|$ から $|\gamma'(t)| = \kappa^2$. A の第 1 列が $e(t) = \gamma'(t)/|\gamma'(t)|$ であることから

$$\gamma'(t) \,=\, {}^{T}(-a\kappa^2\sin(t/c), a\kappa^2\cos(t/c), b\kappa^2)$$

となり, これから

$$\gamma(t) \,=\, {}^{T}(ac\kappa^2\cos(t/c), ac\kappa^2\sin(t/c), b\kappa^2 t) + v \quad (v \in \mathbb{R}^3 \text{ は積分定数}).$$

以上です.