数学演習 VII・VIII　5 月 9 日分小テスト解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

問題. $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ から自分自身への写像

$$f(z) := 1 - z, \quad g(z) := 1/z$$

を考える. 写像の合成 $f \circ f$ や $f \circ g$ を f^2 や fg のように表す.

(1) $f^2(z)$, $g^2(z)$, $fg(z)$, $gf(z)$, $fgf(z)$, $gfg(z)$ を z の関数として求めよ.

(2) f, f^{-1}, g, g^{-1} を任意に有限回合成して得られる写像全体のなす集合は, 写像の合成に関して群 G になる (このことは認めてよい). G が有限群であることを示し, その位数を求めよ.

解答. (1) $f^2(z) = g^2(z) = z$, $fg(z) = 1 - 1/z$, $gf(z) = 1/(1-z)$, $fgf(z) = gfg(z) = -z/(1-z)$.

(2) G は集合としては

$$G = \langle f, g \rangle = \{f^{a_1} g^{b_1} f^{a_2} g^{b_2} \cdots f^{a_n} g^{b_n} \mid n \in \mathbb{N},\ a_i, b_i \in \mathbb{Z}\}$$

と書ける. (1) の計算より $f^2 = g^2 = \mathrm{id}$ となるから, G の任意の元は $fgfg\cdots$ または $gfgf\cdots$ のように f と g の交互の積で書ける. 再び (1) の計算から id, f, g, fg, gf, $fgf = gfg$ の 6 つは互いに異なる. また $fgf = gfg$ と $f^2 = g^2 = \mathrm{id}$ を用いて, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して

$$(fg)^n = fg, \quad (gf)^n = gf, \quad (fg)^n f = fgf = gfg = (gf)^n g$$

が確認できるので, この 6 つ以外に G の元は存在しない. 以上より $G = \{\mathrm{id}, f, g, fg, gf, fgf\}$ となり, G は有限群で $|G| = 6$.

コメント. $2 + 3$ 点で採点しました. 平均点は 4.1 点でした.

問題文に書きませんでしたが, G の単位元は恒等写像 $\mathrm{id} : z \mapsto z$ です. このことを認識していない答案が半数以上ありました. 注意しましょう.

以上です.

[*1] 2019/05/09 版, ver. 0.1.