数学演習 VII・VIII　5 月 9 日分解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html`

4　Lebesgue 積分 1 (測度論)

4.1　可測空間

問題 4.1. $\{x\} \in 2^S$ だから $\Longrightarrow$ は明らか．逆に任意の $x \in S$ に対し $\{x\} \in \mathscr{M}$ だと仮定する．任意の部分集合 $T \subset S$ について, 可算集合 I が存在して $T = \{x_i \mid i \in I\}$ と書けるから $T = \cup_{i \in I}\{x_i\} \in \mathscr{M}$.

4.2　測度空間

問題 4.2. §4.1 の例より $(S, 2^S)$ は可測空間であるから, μ が測度の条件を満たすことを示せばよい．μ の値域が $[0, \infty]$ にあることと $\mu(\emptyset) = 0$ は定義から明らか．σ 加法性を確認する．$I := \{n \in \mathbb{Z}_{>0} \mid M_n \neq \emptyset\}$ とする．$I = \{n \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \mu(M_n) \geq 1\}$ に注意する．$M := \cup_{n \geq 1} M_n = \sqcup_{n \geq 1} M_n$ が無限集合なら I は無限集合で, $\mu(M)$ と $\sum_{n \geq 1} \mu(M_n)$ は共に ∞ となり等しい．M が有限集合なら I は有限集合で, $M = \sqcup_{n \geq 1} M_n$ より $\mu(M) = \sum_{x \in M} 1 = \sum_{n \in I} \sum_{x \in M_n} 1 = \sum_{n \in I} \mu(M_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(M_n)$.

問題 4.3. 前問 4.2 と同様に σ 加法性のみ非自明である．$M := \cup_{n \geq 1} M_n = \sqcup_{n \geq 1} M_n$ とする．$x \in M$ なら $x \in M_n$ となる n が唯一存在する．従って $\mu(M)$ と $\sum_{n \geq 1} \mu(M_n)$ は共に 1 となり等しい．一方 $x \notin M$ なら任意の n について $x \notin M_n$ だから, $\mu(M)$ と $\sum_{n \geq 1} \mu(M_n)$ は共に 0 となり, やはり等しい.

問題 4.4. $M_n = M_1 \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n-1} M_{k+1} \setminus M_k$, $M = M_1 \sqcup \bigsqcup_{k \geq 1} M_{k+1} \setminus M_k$ だから, σ 加法性より

$$\mu(M) = \mu(M_1) + \sum_{k \geq 1} \mu(M_{k+1} \setminus M_k) = \lim_{n \to \infty} \Big(\mu(M_1) + \sum_{k \geq 1}^{n-1} \mu(M_{k+1} \setminus M_k) \Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(M_n).$$

問題 4.5. まず有限個の $M_1, \ldots, M_n$ についての劣加法性を n に関する帰納法で示す.

$n = 1$ のときは何もすることはない．$n = 2$ のとき, $M_1 \cup M_2 = M_2 \sqcup (M_1 \setminus M_2)$ と σ 加法性から $\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_2) + \mu(M_1 \setminus M_2)$．また $M_1 \setminus M_2 \subset M_1$ に単調性を使って $\mu(M_1 \setminus M_2) \leq \mu(M_1)$．これらを合わせて $\mu(M_1 \cup M_2) \leq \mu(M_2) + \mu(M_1)$.

n 以下で成立すると仮定すると, $\cup_{k=1}^n M_k = M_n \sqcup (\cup_{k=1}^{n-1} M_k \setminus M_n)$ と σ 加法性から $\mu(\cup_{k=1}^n M_k) = \mu(M_n) + \mu(\cup_{k=1}^{n-1} M_k \setminus M_n)$．単調性より $\mu(\cup_{k=1}^{n-1} M_k \setminus M_n) \leq \mu(\cup_{k=1}^{n-1} M_k)$．また帰納法の仮定から $\mu(\cup_{k=1}^{n-1} M_k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \mu(M_k)$．以上から $\mu(\cup_{k=1}^n M_k) \leq \sum_{k=1}^n \mu(M_k)$.

次に可算無限個の M_n 達について示す．$M := \cup_{n \geq 1} M_n$, $L_n := \cup_{k=1}^n M_k$ とすると $L_1 \subset L_2 \subset \cdots$, $\cup_{n \geq 1} L_n = M$ なので, 増大列連続性より $\mu(M) = \lim_{n \to \infty} \mu(L_n)$．既に示した有限個の場合の劣加法性より $\mu(L_n) \leq \sum_{k=1}^n \mu(M_k)$．よって

$$\mu(M) = \lim_{n \to \infty} \mu(L_n) \leq \lim_{n \to \infty} \textstyle\sum_{k=1}^n \mu(M_k) = \sum_{k \geq 1} \mu(M_k).$$

問題 4.6. $M_n = M \sqcup \bigsqcup_{k \geq n} M_k \setminus M_{k+1}$ と σ 加法性より

$$\mu(M_n) = \mu(M) + \textstyle\sum_{k \geq n} \mu(M_k \setminus M_{k+1}). \qquad (*)$$

[*1] 2019/05/09 版, ver. 0.2.

特に $n=1$ とすると $\infty > \mu(M_1) \geq \sum_{k\geq 1}\mu(M_k\setminus M_{k+1})$. これから $\lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq n}\mu(M_k\setminus M_{k+1})=0$. 従って $(*)$ で $n\to\infty$ として $\lim_{n\to\infty}\mu(M_n)=\mu(M)$.

4.3 Borel 集合族

問題 4.7. 与えられた $\mathscr{N}\subset 2^S$ に対し $\mathscr{M}:=2^S$ は $\mathscr{N}$ を含む σ 加法族だから, $\sigma[\mathscr{N}]:=\bigcap_{\mathscr{M}}\mathscr{M}$ の右辺は空集合ではない. $\sigma[\mathscr{N}]$ が σ 加法族であることは, 定義の右辺に現れる任意の $\mathscr{M}$ は σ 加法族の定義の三条件を満たすので, $\sigma[\mathscr{N}]$ 自身も三条件を満たすことから分かる. また $\sigma[\mathscr{N}]\supset\mathscr{N}$ は右辺の $\mathscr{M}$ の条件から明らか. 最小性は, $\mathscr{N}$ を含む σ 加法族が右辺に必ず現れることから従う.

問題 4.8. σ 加法族の定義の三条件を確認する. $\emptyset\in\mathscr{M}$ より $\emptyset=\emptyset\cap S\in\mathscr{M}|_S$. $M\in\mathscr{M}|_S$ を $M=S\cap N$, $N\in\mathscr{M}$ と書けば, $N^c=T\setminus N\in\mathscr{M}$ より $M^c=S\setminus M=(T\setminus N)\cap S=N^c\cap S\in\mathscr{M}|_S$. 最後に $M_k\in\mathscr{M}|_S$ を $M_k=S\cap N_k$, $N_k\in\mathscr{M}$ と書けば, $\cup_{k\geq 1}N_k\in\mathscr{M}$ より $\cup_{k\geq 1}M_k=(\cup_{k\geq 1}N_k)\cap S\in\mathscr{M}|_S$.

問題 4.9. $x=(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ とする. $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $I_n:=\prod_{k=1}^d(x_k-1/n,x_k]$ とすれば I_n は左開区間で $\cap_{n\geq 1}I_n=\{x\}$. よって $\{x\}\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$.

4.4 Borel 集合族上の Lebesgue 測度

問題 4.10. $m,n\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $H_{m,n}:=(-1/n,0]\times(-m,m]^{d-1}$, $H_m:=\{0\}\times(-m,m]^{d-1}$ とする. m を固定すれば $H_{m,n}\searrow H_m$ であり, $\mu(H_{m,n})=(2m)^{d-1}/n$ より $\lim_{n\to\infty}\mu(H_{m,n})=0$. 従って減少列連続性より $\mu(H_m)=\lim_{n\to\infty}\mu(H_{m,n})=0$. 一方 $H_m\nearrow H$ と増大列連続性より $\mu(H)=\lim_{m\to\infty}\mu(H_m)=0$.

問題 4.11. $I^\circ\subset I\subset\overline{I}$ より $\mu(I^\circ)\leq\mu(I)\leq\mu(\overline{I})$ なので $\mu(I^\circ)=\mu(\overline{I})$ を示せば十分. 座標軸に垂直な超平面 H については問題 4.10 と同様の議論で $\mu(H)=0$. すると $\overline{I}\setminus I^\circ$ は d 個の座標軸に垂直な超平面の合併に含まれるから $\mu(\overline{I}\setminus I^\circ)=0$. よって $\mu(\overline{I})=\mu(I^\circ)+\mu(\overline{I}\setminus I^\circ)=\mu(I^\circ)$.

4.5 測度の完備化

問題 4.12. $C\in(\mathscr{M}|_T)^\mu$ は次の条件 $(*)$ と同値: $(*)$ $A,\widetilde{A}\in\mathscr{M}$ が存在して $A\cap T\subset C\subset\widetilde{A}\cap T$ かつ $\mu((\widetilde{A}\cap T)\setminus(A\cap T))=0$. $(*)$ なら $C\in\mathscr{M}^\mu$ かつ $C\subset T$ なので $C\in\mathscr{M}^\mu|_T$. 逆に $C\in\mathscr{M}^\mu|_T$ なら $C=B\cap T$, $C\in\mathscr{M}^\mu$ と書けて, B に対して $A,\widetilde{A}$ を定義のようにとれば, これらが $(*)$ を満たす.

4.6 Lebesgue 測度

問題 4.13. 平行移動不変性から $c=0$ としてよい. 左開区間 $I=\prod_{i=1}^d(a_i,b_i]$ に対しては Borel 集合上の Lebesgue 測度 μ の定義より $\det(T)\mu(\varphi^{-1}(I))=\mu(I)$. すると μ の一意性から任意の Borel 可測集合に対して結論が成立する. 完備化は一意に存在するので, 任意の Lebesgue 可測集合に対しても成立する.

以上です.