数学演習 VII・VIII　5 月 9 日分問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

4　Lebesgue 積分 1 (測度論)

集合 S の部分集合全体のなす集合を 2^S と書きます.

4.1　可測空間

定義. S を集合とする. 次の三条件を満たす S の部分集合の族 $\mathscr{M} \subset 2^S$ を σ **加法族** (σ-algebra, σ-field) と呼ぶ.

- $\emptyset \in \mathscr{M}$.
- $M \in \mathscr{M}$ ならば $M^c := S \setminus M \in \mathscr{M}$.
- $M_n \in \mathscr{M}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ならば $\cup_{n \geq 1} M_n \in \mathscr{M}$.

また集合 S と σ 加法族 $\mathscr{M}$ の組 $(S, \mathscr{M})$ を**可測空間** (measurable space) と呼び, $\mathscr{M}$ の元 M は**可測** (measurable) であるという.

例. 任意の集合 S に対し, $(S, \{\emptyset, S\})$ と $(S, 2^S)$ はともに可測空間である.

問題 4.1 $(*)$**.** 可算集合 S 上の可測空間 $(S, \mathscr{M})$ について次を示せ: $\mathscr{M} = 2^S \iff$ 任意の $x \in S$ に対し $\{x\} \in \mathscr{M}$.

4.2　測度空間

定義. $(S, \mathscr{M})$ を可測空間とする. $\mathscr{M}$ 上の関数

$$\mu : \mathscr{M} \longrightarrow [0, \infty] = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

が以下の二条件を満たすとき, $(\mathscr{M}, \mu)$ または単に μ を**測度** (measure) と呼び, $(S, \mathscr{M}, \mu)$ を**測度空間** (measure space) と呼ぶ.

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- (**完全加法性**, **可算加法性**または σ **加法性**) $M_n \in \mathscr{M}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が互いに交わらないとき

$$\mu\Big(\bigcup_{n \geq 1} M_n\Big) = \sum_{n \geq 1} \mu(M_n).$$

問題 4.2 $(*)$**.** 集合 S に対し $\mu : 2^S \to [0, \infty]$ を

$$\mu(M) := \begin{cases} \sum_{x \in M} 1 & (M \text{ が有限集合}) \\ \infty & (M \text{ が無限集合}) \end{cases}$$

[*1] 2019/05/09 版, ver. 0.3.

と定めると, $(S, 2^S, \mu)$ が測度空間になることを示せ. この測度 μ を S の**個数測度** (counting measure) と呼ぶ.

問題 4.3 $(*)$**.** 集合 S とその元 $x \in S$ に対し $\delta_x : 2^S \to [0, \infty]$ を

$$\delta_x(M) := \begin{cases} 1 & (x \in M) \\ 0 & (x \notin M) \end{cases}$$

と定めると, $(S, 2^S, \delta_x)$ が測度空間になることを示せ. この測度 δ_x を x における **Dirac 測度**と呼ぶ.

集合 M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ が $M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ および $\cup_{n \geq 1} M_n = M$ を満たすとき, $M_n \nearrow M$ と書く. また $M_1 \supset M_2 \supset \cdots$ および $\cap_{n \geq 1} M_n = M$ を満たすとき, $M_n \searrow M$ と書く.

定理 4.2.1. 測度空間 $(S, \mathscr{M}, \mu)$ と $M \in \mathscr{M}$ および $M_n \in \mathscr{M}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ に対し, 以下の性質が成立する.
単調性: $M_1 \subset M_2$ なら $\mu(M_1) \leq \mu(M_2)$.
劣加法性: $\mu(\cup_{n \geq 1} M_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(M_n)$.
増大列連続性: $M_n \nearrow M$ ならば $\lim_{n \to \infty} \mu(M_n) = \mu(M)$.
減少列連続性: $M_n \searrow M$ かつ $\mu(M_1) < \infty$ ならば $\lim_{n \to \infty} \mu(M_n) = \mu(M)$.

単調性は $M_2 = M_1 \sqcup (M_2 \setminus M_1)$ に σ 加法性を用いて $\mu(M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2 \setminus M_1) \geq \mu(M_1)$ と示せる.

問題 4.4 $(*)$**.** 定理 4.2.1 の増大列連続性を示せ.

問題 4.5 $(*)$**.** 定理 4.2.1 の劣加法性を示せ.
(まず有限個の $M_1, \ldots, M_n$ について $\mu(\cup_{k=1}^n M_k) \leq \sum_{k=1}^n \mu(M_k)$ を示すとよい.)

問題 4.6 $(*)$**.** 定理 4.2.1 の減少列連続性を示せ.

4.3 Borel 集合族

定義 4.3.1. 集合 S の部分集合の族 $\mathscr{L} \subset 2^S$ に対し

$$\sigma[\mathscr{L}] := \bigcap_{\mathscr{M}} \mathscr{M}$$

と定める. 但し $\mathscr{M}$ は S の σ 加法族であって $\mathscr{M} \supset \mathscr{L}$ となるもの全体を走る. この $\sigma[\mathscr{L}]$ は $\mathscr{L}$ を含む最小の σ 加法族である. これを **$\mathscr{L}$ が生成する σ 加法族**と呼ぶ.

問題 4.7 $(*)$**.** $\sigma[\mathscr{L}]$ が $\mathscr{L}$ を含む最小の σ 加法族であることを確認せよ.

定義 4.3.2. 集合 T とその部分集合 $S \subset T$ および T の σ 集合族 $\mathscr{M} \subset 2^T$ に対し,

$$\mathscr{M}|_S := \{M \cap S \mid M \in \mathscr{M}\}$$

は S の σ 加法族である. この $\mathscr{M}|_S$ を **$\mathscr{M}$ の S への制限**と呼ぶ.

問題 4.8 $(*)$**.** $\mathscr{M}|_S$ が S の σ 加法族であることを確認せよ.

以上の準備を用いて $\mathbb{R}^d$ の σ 加法族である Borel 集合族を定義する.

定義. (1) $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ とする．$I \subset \overline{\mathbb{R}}^d$ が左開区間であるとは $I = \prod_{j=1}^d I_j,\ I_j = (a_j, b_j] \subset \overline{\mathbb{R}}$ と書けることとする．$\overline{\mathbb{R}}^d$ が左開区間全体のなす集合を $\mathscr{I}^d$ と書く．

(2) $S \subset \mathbb{R}^d$ の **Borel 集合族** $\mathscr{B}(S)$ を次のように定義する．

$$\mathscr{B}(S) := \sigma[\mathscr{I}^d\big|_S].$$

また $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ の元 $M \subset \mathbb{R}^d$ を **Borel(可測) 集合**と呼ぶ．

注意. $\mathbb{R}^d$ の Euclid 位相に関する開集合全体を $\mathscr{O}^d$ と書くと $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma[\mathscr{O}^d]$ となることが知られている．証明は [吉田, p.29 定理 1.4.1] を参照せよ．

問題 4.9 (∗)**.** 任意の元 $x \in \mathbb{R}^d$ について一点集合 $\{x\}$ は Borel 可測集合であることを示せ．

4.4 Borel 集合族上の Lebesgue 測度

定理 4.4.1. 可測空間 $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の測度 μ であって次の性質を満たすものが唯一存在する:

$$J = \prod_{j=1}^d (a_i, b_i] \cap \mathbb{R}^d \quad (a_i, b_i \in \overline{\mathbb{R}},\ a_i \leq b_i) \quad \text{に対し}\ \mu(J) = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j).$$

(但し 0 と ∞ の積は 0 とする．) この μ を **Borel 集合族上の Lebesgue 測度**と呼ぶ．

この主張の証明は [吉田, §5.2] を参照せよ．

以下の問題 4.10, 4.11 では Lebesgue 測度による測度空間 $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$ を考える．

問題 4.10 (∗)**.** 超平面 $H = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_1 = 0\}$ の Lebesgue 測度が $\mu(H) = 0$ となることを示せ．

問題 4.11 (∗)**.** 左開区間 $I \subset \mathbb{R}^d$ に対し $\mu(I^\circ) = \mu(\overline{I}) = \mu(I)$ となることを示せ．但し I° と $\overline{I}$ はそれぞれ I の (Euclid 位相に関する) 内部と閉包を表す．

4.5 測度の完備化

この副節を通して $(S, \mathscr{M}, \mu)$ を測度空間とする．

定義. (1) $N \subset S$ は次の条件を満たす $\widetilde{N} \in \mathscr{M}$ が存在するとき μ **零集合**または単に**零集合**と呼ばれる: $N \subset \widetilde{N}$ かつ $\mu(\widetilde{N}) = 0$. μ 零集合全体のなす集合を $\mathscr{N}^\mu \subset 2^S$ と書く．

(2) $\mathscr{N}^\mu \subset \mathscr{M}$ のとき測度 μ は**完備** (complete) であるという．

定理 4.5.1. (1) $B \subset S$ に対し

$$\mathscr{M}^\mu := \{B \subset S \mid A, \widetilde{A} \in \mathscr{M}\ \text{で}\ A \subset B \subset \widetilde{A}\ \text{かつ}\ \mu(\widetilde{A} \setminus A) = 0\ \text{となるものが存在}\ \}$$

とすると $\mathscr{M}^\mu = \sigma[\mathscr{M} \cup \mathscr{N}^\mu]$. 但し右辺は定義 4.3.1 で与えた σ 加法族．

(2) $B \in \mathscr{M}^\mu$ に対し, (1) の条件を満たす $A \in \mathscr{M}$ を取って $\mu^*(B) := \mu(A)$ と定めると, 関数 $\mu^* : \mathscr{M}^\mu \to [0, \infty]$ が well-defined であり, 更に $(S, \mathscr{M}^\mu, \mu^*)$ は測度空間になる．

(3) 測度 μ^* は完備である,

(4) $(S, \mathscr{L}, \lambda)$ が測度空間であって $\mathscr{M} \subset \mathscr{L}$, $\lambda|_{\mathscr{L}} = \mu$ かつ λ は完備だとする．この時 $\mathscr{M}^\mu \subset \mathscr{L}$ かつ $\lambda|_{\mathscr{M}^\mu} = \mu^*$.

この主張の証明は [吉田, 命題 3.1.2] を参照せよ.

問題 4.12 $(*)$**.** $T \in \mathscr{M}$ なら $(\mathscr{M}|_T)^\mu = \mathscr{M}^\mu|_T$ となることを示せ．但し $\mathscr{M}|_T$ は定義 4.3.2 で与えた $\mathscr{M}$ の制限.

定義. 定理 4.5.1 の測度空間 $(S, \mathscr{M}^\mu, \mu^*)$ を $(S, \mathscr{M}, \mu)$ の**完備化** (completion) という．または単に測度 μ^* を μ の完備化という.

4.6 Lebesgue 測度

定義. (1) 定理 4.4.1 の測度空間 $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$ の完備化を $(\mathbb{R}^d, \mathscr{L}^d, \mu^*)$ と表す．また $(\mathscr{L}^d, \mu^*)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の **Lebesgue 測度**と呼ぶ.

(2) $\mathscr{L}^d$ の元を **Lebesgue 可測集合**と呼ぶ.

(3) $S \subset \mathbb{R}^d$ に対し $\mathscr{L}^d$ の S への制限 $\mathscr{L}^d\big|_S$ (定義 4.3.2) を $\mathscr{L}^d(S)$ と書く．またこれから定まる測度 $(\mathscr{L}^d(S), \mu^*|_S)$ を S 上の Lebesgue 測度と呼ぶ.

命題 4.6.1. Lebesgue 測度 $(\mathscr{L}^d, \mu)$ は平行移動不変．つまり任意の $B \in \mathscr{L}^d$, $c \in \mathbb{R}^d$ に対し，$B + c := \{b + c \mid b \in B\}$ とすると $\mu^*(B + c) = \mu^*(B)$.

証明は [吉田, 命題 3.2.3] を参照せよ.

問題 4.13 $(**)$**.** T を d 次対角行列で対角成分は全て正の実数のものとする．また $c \in \mathbb{R}^d$ とし，$\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を $\varphi(x) := Tx + c$ で定める．この時 $B \in \mathscr{L}^d$ なら $\varphi^{-1}(B) \in \mathscr{L}^d$ かつ $\mu^*(\varphi^{-1}(B)) = \mu^*(B)/\det(T)$ となることを示せ.

4.7 レポート問題

レポート問題 4.1 $(*)$**.** $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mu)$ を Lebesgue 測度空間とする．非可算部分集合 $K \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ であって $\mu(K) = 0$ となるものを一つ挙げよ.

レポート問題 4.2 $(**)$**.** $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする．濃度 n の有限集合 $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ に対し，$([n], \mathscr{M})$ が可測集合となるような $\mathscr{M}$ は全部でいくつあるか？

参考文献

[吉田] 吉田伸生 ルベーグ積分入門 — 使うための理論と演習, 遊星社 (2006).

以上です.