

## 数学演習 VII・VIII 4月25日分小テスト解答\*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html>

問題. 位相空間  $X$  の空でない部分集合  $A$  は次の条件を満たすとき連結であるという:  $X$  の開集合  $U$  と  $V$  で以下の四条件をすべて満たすものは存在しない.

$$A \subset U \cup V, \quad A \cap U \cap V = \emptyset, \quad A \cap U \neq \emptyset, \quad A \cap V \neq \emptyset.$$

空でない位相空間  $X$  に対し以下の四条件が同値であることを示せ.

- (1)  $X$  は連結である.
- (2) 1次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}$  への任意の連続写像  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  と任意の  $x, y \in X$  及び任意の  $r \in \mathbb{R}$  に対し,  $f(x) \leq r \leq f(y)$  ならば  $f(z) = r$  となる  $z \in X$  が存在する.
- (3) 離散位相空間  $\{0, 1\}$  への任意の連続写像  $f: X \rightarrow \{0, 1\}$  は定数関数である.
- (4)  $U \subset X$  が開集合かつ閉集合ならば  $U = X$  または  $U = \emptyset$  である.

解答. (1)  $\Rightarrow$  (2)  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  を連続写像とする.  $f(x) < r < f(y)$  の場合を考えれば十分.

$$U := \{u \in X \mid f(u) < r\}, \quad V := \{v \in X \mid f(v) > r\}$$

と定めると,  $f$  の連続性より  $U$  と  $V$  は開集合. また  $U \cap V = \emptyset$  であり,  $x \in U$  より  $U \neq \emptyset$  及び  $y \in V$  より  $V \neq \emptyset$  となる.  $X$  は連結なので  $X \not\subset U \cup V = \{u \in X \mid f(u) \neq r\}$ . 従って  $X \setminus (U \cup V)$  は空でないので, その元  $z$  をとれば  $f(z) = r$  となる.

- (2)  $\Rightarrow$  (3) 連続関数  $f: X \rightarrow \{0, 1\}$  を  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  とみなしたのも連続である.  $f(X) = \{0, 1\}$  なら条件 (2) より  $f(z) = 1/2$  となる  $z \in X$  が存在し矛盾する. 従って  $f(X) = \{0\}$  または  $f(X) = \{1\}$ .
- (3)  $\Rightarrow$  (4)  $U \subset X$  が開かつ閉なら,  $U$  の特性関数

$$\chi_U: X \longrightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_U(x) := \begin{cases} 1 & (x \in U \text{ の場合}) \\ 0 & (x \notin U \text{ の場合}) \end{cases}$$

は連続. すると条件 (3) より  $\chi_U(X) = \{0\}$  または  $\chi_U(X) = \{1\}$ . 前者は  $U = \emptyset$ , 後者は  $U = X$  を意味する.

- (4)  $\Rightarrow$  (1) 開集合  $U, V \subset X$  が  $X \subset U \cup V$  と  $X \cap U \cap V = \emptyset$  を満たすなら  $V = X \setminus U$  である. よって条件 (4) より  $U = \emptyset$  または  $V = \emptyset$  なので  $X$  は連結.

コメント. (1)  $\Rightarrow$  (2) は 2 点, 他は 1 点満点で採点しました. 平均点は 2.7 点でした.

(2)  $\Rightarrow$  (3) で “連続関数  $f: X \rightarrow \{0, 1\}$  を  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  とみなしたのも連続” ということに言及していない答案がいくつかありました. これを言及しないと (2) が使えないので注意して下さい.

以上です.

---

\*1 2019/04/25 版, ver. 0.1.