数学演習 VII・VIII　4 月 25 日分問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

3　群論 1 (基本概念)

$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合, $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ は非負整数全体の集合, $\mathbb{C}$ は複素数全体の集合を表します.
各問題の冒頭にある $*$ の数は, その問題の難易度の目安を表しています.

3.1　群の定義

定義. 集合 G と写像 $m : G \times G \to G$ および元 $e \in G$ が条件

- (結合則) 任意の $x, y, z \in G$ に対して $m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$.
- (単位元) 任意の $x \in G$ に対して $m(x, e) = m(e, x) = x$.
- (逆元の存在) 任意の $x \in G$ に対してある $x^{-1} \in G$ が存在して $m(x, x^{-1}) = m(x^{-1}, x) = e$.

を満たすとき, (G, m, e) は**群** (group) であるという. m を**積**ないし**演算**と呼び, e を**単位元** (unit) と呼ぶ.

簡単のため $m(x, y)$ を $x \cdot y$ と書いたり, より簡単に xy と書いたりする. 上の定義を $\cdot$ を使って書き直すと

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad x \cdot e = e \cdot x = x, \quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e.$$

また群 (G, m, e) のことを $(G, \cdot, e)$ と書いたり, あるいは単に G だけで表す.

例 3.1 (群の例)**.**　(1) 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は和を演算として群となる. 単位元は 0.

(2) 集合 X に対して $\mathrm{Aut}(X) := \{f : X \to X \mid \text{全単射}\}$ は写像の合成を演算として群となる. 単位元は恒等写像 id_X, 逆元は逆写像で与えられる. この群を X の**置換群** (permutation group) または X の**対称群** (symmetric group) と呼ぶ.
特に $X = [n] := \{1, 2, ..., n\}$ のときは $S_n := \mathrm{Aut}([n])$ と書いて n **次対称群**と呼ぶ.

(3) 複素数成分の n 次正則行列全体 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は行列の積を演算として群となる. 単位元は単位行列. この群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を n 次**一般線形群** (general linear group) と呼ぶ.

問題 3.1 ($*$)**.** 例 3.1 (3) を確認せよ.

定義. 群 $(G, \cdot, e)$ は任意の $g, h \in G$ に対して $g \cdot h = h \cdot g$ となるとき**可換群** (commutative group) ないし **Abel 群** (abelian group) であるという.

例. 例 3.1 (1) の群 $\mathbb{Z}$ は可換群である.

問題 3.2 ($*$)**.** 例 3.1 (3) の群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は可換群か否か判定せよ.

[*1] 2019/04/25 版, ver. 0.4.

3.2　元の位数, 有限群の位数, 巡回群

G を群とする. $x \in G$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し, x^n を $x^0 := e$, $x^1 := x$, $x^n := x^{n-1} \cdot x = x \cdot x^{n-1}$ と帰納的に定義する. また $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ に対しては $x^{-n} := (x^{-1})^n$ と定義する.

定義. G を群とする.

(1) $x \in G$ について, $x^n = e$ となる $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在するとき, そのような n のうち最小のものを x **の位数** (order) とよぶ. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $x^n \neq e$ であるとき, x **の位数は無限**であるという.

(2) G が有限集合であるとき, G を**有限群** (finite group) とよび, $|G|$ を G **の位数** (order) という. 有限群でない群を**無限群** (infinite group) とよぶ.

問題 3.3 (∗)**.** G を群とする. 次の主張を示せ.

(1) G が有限群ならば, G の任意の元の位数は有限である.

(2) e を G の単位元とする. $g \in G$ が互いに素な 2 つの整数 m, n に対し $g^m = g^n = e$ を満たすなら $g = e$.

問題 3.4 (∗ **対称群**)**.** $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. 例 3.1 (2) の n 次対称群 S_n の位数を求めよ.

定義. (1) 群 G が**巡回群** (cyclic group) であるとは, ある $a \in G$ があって, 任意の $x \in G$ に対し $k \in \mathbb{Z}$ が存在して $x = a^k$ となることをいう. このとき $G = \langle a \rangle$ と書き, a を巡回群 G の**生成元** (generator) と呼ぶ.

(2) 巡回群 $G = \langle a \rangle$ について, $a^k \neq e$ $(1 \leq k \leq n-1)$ かつ $a^n = e$ となる $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在するとき, G を**位数 n の巡回群**という.

問題 3.5 (∗ **1 の冪根の生成する巡回群**)**.** $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ を 1 つ取って固定し, $G := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ とおく. G が複素数の乗法を積とする位数 n の巡回群であることを示せ.

問題 3.6 (∗ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ **は巡回群**)**.** $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. $\mathbb{Z}$ の同値関係 $x \sim y \iff x - y \in n\mathbb{Z}$ に関する商集合を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と表し, $x \in \mathbb{Z}$ が定める元を $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と表す. この $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が $\overline{x} + \overline{y} := \overline{x+y}$ を演算とする位数 n の巡回群となることを示せ.

問題 3.7 (∗∗ **二面体群**)**.** 表裏の区別がつく正 n 角形をした板 P_n があって, 各頂点には表から見て時計回りに 1 から n の番号がふってあるとする. この P_n を xy 平面に次のように置く.

- P_n の中心は原点 $(0, 0)$ に重なる.
- P_n の頂点の 1 つは x 軸の正の部分の上にある.

このとき

(1) P_n の表を上にするような置き方は何通りあるか？

(2) P_n の表裏を気にしない置き方は何通りあるか？

(3) P_n の置き方を変える操作について考える. P_n を原点中心に角度 $2\pi/n$ だけ反時計回りに回転させる操作を a とし, P_n を x 軸に関して反転させる操作を b とする. このとき

$$a^n = 1, \quad b^2 = 1, \quad ba = a^{-1}b$$

となることを示せ. ただし, ここでの演算は操作の合成であるとし, 1 は動かさないことを表す. また, ab は b の後に a を施すことを意味する.

(4) 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して $ba^k = a^{-k}b$ を示せ. 特に $(a^k b)^2 = 1$ を示せ.

(5) P_n の置き方を変える操作全体の集合を D_n と表すと, 次が成立することを示せ.

$$D_n = \{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ab, a^2b, \dots, a^{n-1}b\}.$$

よって D_n は操作の合成を演算として群となり, またその位数は $2n$ である. この群 D_n を位数 $2n$ の**二面体群** (dihedral group) という.

3.3　部分群, 正規部分群

定義. $G = (G, m, e)$ を群とする. G の部分集合 H が次の 3 つの条件を満たすとき, H を G の**部分群** (subgroup) とよぶ.

- $e \in H$.
- 任意の $x, y \in H$ に対し $m(x, y) \in H$. (H は G の演算について閉じている.)
- 任意の $x \in H$ に対し $x^{-1} \in H$. (H の任意の元の逆元は H に属する.)

このとき $H \subseteq G$ もしくは $H \leq G$ と書く[*2].

定義. 群 G の部分群 H が条件

$$\forall g \in G,\ \forall h \in H, \quad g^{-1}hg \in H$$

を満たすとき, H を G の**正規部分群** (normal subgroup) とよぶ. このとき $H \triangleleft G$ と書く.

例. 可換群の任意の部分群は正規部分群である.

問題 3.8 ($*$)**.** 複素数成分の n 次正方行列であって行列式が 1 であるもの全体のなす集合を $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ とかく. このとき $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ は問題 3.1 (3) の群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の正規部分群であることを示せ.

問題 3.9 ($*$ 3 次対称群)**.** 例 3.1 (2) の 3 次対称群 S_3 を考える. これは集合 $[3] = \{1, 2, 3\}$ から自分自身への全単射全体からなる集合を, 写像の合成 $\circ$ を演算とし, 恒等写像 id を単位元とすることで群とみなしたものである. S_3 の元 f を

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$$

と書くことにしよう. 例えば単位元 $\mathrm{id} \in S_3$ は

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

と書ける. このとき, S_3 は集合としては

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

と書ける. 特に S_3 の位数は 6 である. 元 $s_1, s_2 \in S_3$ を次のように定める.

$$s_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad s_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

[*2] 部分群の記号はあまり統一されていません. ですので, 日本語なら “$H \subset G$ を部分群とする”, 英語なら “let $H \subset G$ be a subgroup” のように明示的に宣言するのが無難です.

すると積 $s_1 s_2 \in S_3$ は, 写像の合成 $f \circ g$ の順番に気を付けると, 次のように計算できる.

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$ を示せ. これは**組み紐関係式** (braid relation) と呼ばれる重要な等式である.
(2) 元 $s_1 s_2 \in S_3$ の位数を求めよ.
(3) S_3 の部分群を全て決定せよ. また, 部分群の中で可換なものを全て求めよ.

3.4　直積群, 群の同型

定義. 2 つの群 $G = (G, m_G, e_G)$ と $H = (H, m_H, e_H)$ に対して, 直積集合 $G \times H$ と写像

$$m_{G\times H}\colon\ (G \times H) \times (G \times H) \longrightarrow G \times H, \quad \big((g_1, h_1), (g_2, h_2)\big) \longmapsto \big(m_G(g_1, g_2), m_H(h_1, h_2)\big)$$

および $e_{G\times H} := (e_G, e_H)$ を考えると, $(G \times H, m_{G\times H}, e_{G\times H})$ は群になる. これを G と H の**直積** (direct product) と呼び, 簡単のため $G \times H$ と略記する.

問題 3.10 $(*)$**.** $(G \times H, m_{G\times H}, e_{G\times H})$ が群であることを確認せよ.

定義. 群 G と H が**同型** (isomorphic) であるとは, 任意の $x, y \in G$ に対して $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ となる全単射 $f : G \to H$ が存在することをいう.

問題 3.11 $(*)$**.** 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, 問題 3.1 の群 $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ と問題 3.6 の群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が同型であることを示せ.

問題 3.12 $(*)$**.** $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ と $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は同型であることを示せ.

問題 3.13 $(*)$**.** $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ と $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ と二面体群 D_4 は互いに同型でないことを示せ.

3.5　レポート問題

レポート問題 3.1 $(*)$**.** 位数が 12 以下の有限群を分類せよ.

連絡事項

4/19(金) のオフィスアワーはお休みさせて頂きます.

以上です.