

数学演習 VII・VIII 4月18日分小テスト解答*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html>

問題. \mathbb{R} の同値関係を $x - y \in \mathbb{Z}$ で定め, 商集合を \mathbb{R}/\mathbb{Z} と書く.

- (1) $r \in \mathbb{R}$ に対し, r 倍写像 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が写像 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を誘導するための r の必要十分条件を求めよ.
- (2) $r \in \mathbb{R}$ は (1) の条件を満たすものとし, $m_r: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を誘導された写像とする. $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対し集合 $m_r^{-1}(x)$ の濃度を求めよ.

解答. (1) 求める条件は $r \in \mathbb{Z}$. 実際,

$$\begin{aligned} (\text{求める条件}) &\iff \text{任意の } s \in \mathbb{R} \text{ と } n \in \mathbb{Z} \text{ に対し } r(s+n) - rs \in \mathbb{Z} \\ &\iff \text{任意の } n \in \mathbb{Z} \text{ に対し } rn \in \mathbb{Z} \\ &\iff r \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- (2) $s \in \mathbb{R}$ の \mathbb{R}/\mathbb{Z} における同値類を \bar{s} と表す. \mathbb{R} の加法 $+$ が誘導する \mathbb{R}/\mathbb{Z} 上の加法を同じ記号 $+$ で表す. $r \neq 0$ なら $m_r^{-1}(x) = \{x + \overline{n/r} \mid n = 0, \dots, |r| - 1\}$ なので $|m_r^{-1}(x)| = |r|$. $r = 0$ なら, $x \neq \bar{0}$ のとき $|m_0^{-1}(x)| = |\emptyset| = 0$ であり, $|m_0^{-1}(\bar{0})| = |\mathbb{R}/\mathbb{Z}| = |\mathbb{R}|$.

コメント. (1) は 2 点, (2) は 3 点満点で採点しました. 平均点は 1.7 点でした.

(2) の $|\mathbb{R}|$ は 2^{\aleph_0} とも書けて連続体濃度と呼ばれます. 但し $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ は可算 (無限) 濃度です.

“ $\aleph_0 < \aleph < 2^{\aleph_0}$ となる濃度 \aleph は存在するか?” というのが有名な Cantor の連続体仮説の問題です.

以上です.

*1 2019/02/10 版, ver. 0.1.