数学演習 VII・VIII　4 月 18 日分解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

2　復習 2 (位相空間と連続写像)

2.1　位相空間の基本概念

問題 2.1. 位相空間の定義の三条件を確認する.

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ は自明に成立する. 近傍系の一番目の条件から $X \in \mathcal{T}$ が従う.
- $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ として $x \in O_1 \cap O_2$ を任意にとる. $x \in O_1$ と $O_1 \in \mathcal{T}$ より, ある $U_1 \in \mathcal{U}_x$ が存在して $U_1 \subset O_1$. 同様にある $U_2 \in \mathcal{U}_x$ が存在して $U_2 \subset O_2$. 近傍系の二番目の条件から, ある $V \in \mathcal{U}_x$ が存在して $V \subset U_1 \cap U_2$. すると $V \subset O_1 \cap O_2$. 従って位相空間の二番目の条件が成立する.
- $\{O_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}$ が与えられたとして, $O := \cup_{i \in I} O_i$ とおく. 任意の $x \in O$ に対し, ある $j \in I$ が存在して $x \in O_j$ となる. $O_j \in \mathcal{T}$ なので, ある $U_x \in \mathcal{U}_x$ が存在して $U_x \subset O_j$. すると $U_x \subset O$ となるので, 位相空間の三番目の条件が成立する.

以上で証明できた. なお近傍系の三番目の条件はこの問題では使わない.

問題 2.2. 近傍系の定義の三条件を確認する.

- $x \in U(x;\varepsilon)$ は $U(x;\varepsilon)$ の定義から明らか.
- 任意の $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x$ は $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ を用いて $U_1 = U(x;\varepsilon_1)$, $U_2 = U(x;\varepsilon_2)$ と書けるが, このとき $U_3 := U(x;\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2))$ とすれば, $U_3 \in \mathcal{U}_x$ かつ $U_3 \subset U_1 \cap U_2$. (より正確には $U_3 = U_1 \cap U_2$.)
- $U = U(x;\varepsilon) \in \mathcal{U}_x$ とする. $y \in U$ に対し $V := U(y;\varepsilon - |x-y|)$ と定めれば, $V \in \mathcal{U}_y$ かつ $V \subset U$.

問題 2.3.　(1) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ が開集合であることが簡単に示せるので, $\mathbb{N}$ は閉集合.
(2) $A = (-1, 1)$ となるので, これは開集合.

2.3　連続写像

問題 2.4. 略.

問題 2.5. 同値関係の三条件を確認する. 反射律: 恒等写像 $\mathrm{id}_X : X \to X$ は同相写像なので $X \simeq X$.
対称律: $f : X \to Y$ が同相写像ならその逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ も同相写像なので, $X \simeq Y$ なら $Y \simeq X$.
推移律: $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ が同相写像ならば合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も同相写像なので, $X \simeq Y$ かつ $Y \simeq Z$ ならば $X \simeq Z$.

2.4　部分空間とコンパクト性

問題 2.6.　(1) 同相写像である. f の連続性は連続写像の商であることから従う. f が全単射であることは, $x \geq 0$ なら $f(x) = 1 - 1/(1+x)$, $x \leq 0$ なら $f(x) = 1/(1-x) - 1$ と変形すれば f が単調増加だと分

[*1] 2019/02/07, ver. 0.1.

かって, これから簡単に従う.

(2) 同相写像ではない. $(1,0) \in Y$ は Y の内点だが, その逆像である $0 \in X$ は X の内点ではない.

(3) 同相写像である. f の連続性は (1) と同様の議論から従う. 単射性は簡単に分かる. 全射性については, Y の任意の元 η を $\eta = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r \geq 0$ と極座標表示しておいて, $\xi := (s\cos\theta, s\sin\theta, t)$, $s := \frac{2r}{r^2+1}$, $t := \frac{r^2-1}{r^2+1}$ と定めれば, $\xi \in X$ かつ $f(\xi) = \eta$ となるので, f が全射だと分かる.

問題 2.7. 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し $U_n := (n-2, n+2) \subset \mathbb{R}$ と定めれば $\{U_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{R}$ の開被覆. しかし, どのように有限部分集合 $J \subset \mathbb{Z}$ をとっても, $i := \min J$, $s := \max J$ とすれば $\bigcup_{j\in J} U_j \subset (i-2, s+2) \subsetneq \mathbb{R}$ だから, この開被覆は有限部分被覆を持たない.

問題 2.8. (1) $X \setminus F$ は開集合だから $V_i = U_i \cup (X \setminus F)$ も開集合. また任意の X の元 x について, $x \in F$ ならある $i \in I$ があって $x \in U_i \subset V_i$, $x \notin F$ ならどの $i \in I$ についても $x \in X \setminus F \subset V_i$ だから, どちらにせよ $x \in \cup_{i\in I} V_i$. よって $X = \cup_{i\in I} V_i$.

(2) $\{U_i \mid i \in I\}$ を F の任意の開被覆とする. (1) のように V_i を定めると $\{V_i \mid i \in I\}$ は X の開被覆. X がコンパクトだと仮定しているので, ある有限部分集合 $J \subset I$ があって $X = \cup_{j\in J} V_j$. ここで $V_j = U_j \cup (X \setminus F)$ から $\cup_{j\in J} V_j = (\cup_{j\in J} U_j) \cup (X \setminus F)$. よって

$$F = F \cap X = F \cap \big((\cup_{j\in J} U_j) \cup (X \setminus F)\big) = F \cap (\cup_{j\in J} U_j) \subset \cup_{j\in J} U_j.$$

つまり開被覆 $\{U_i \mid i \in I\}$ は有限部分開被覆 $\{U_J \mid j \in J\}$ を持つ. よって F はコンパクト.

問題 2.9. $f(A)$ の任意の開被覆 $\{U_i \mid i \in I\}$ について, 各 $i \in I$ に対し $f^{-1}(U_i) \subset X$ は開集合だから. $\{f^{-1}(U_i) \mid i \in I\}$ は A の開被覆. A がコンパクトだと仮定しているので, ある有限部分集合 $J \subset I$ があって $A \subset \cup_{j\in J} f^{-1}(U_j)$. よって $f(A) \subset \cup_{j\in J} U_j$, つまり $\{U_i \mid i \in I\}$ は有限部分被覆 $\{U_i \mid j \in J\}$ を持つ.

2.5 Euclid 空間とコンパクト性

問題 2.10. $\alpha \notin X$ と仮定すると, $\mathbb{R} \setminus X$ は開集合なので $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $U(\alpha;\varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus X$. 特に $\beta := \alpha - \varepsilon/2 \notin X$. すると β が X の上界であるが, $\beta < \alpha$ なので α が上限であることと矛盾する.

問題 2.11. (1) $a \in X$ なので $X \neq \emptyset$. $X \subset [a,b]$ だから X は有界.

(2) $\{U_i \mid i \in I\}$ は $[a,b]$ の被覆なので, ある $h \in I$ があって $x_0 \in U_h$. $U_h \subset \mathbb{R}$ は開集合なので, ある $x \in U_h$ があって $x < x_0$. x_0 が上限であることから $x \in X$. よってある有限部分集合 $J \subset I$ があって $[a,x] \subset \cup_{j\in J} U_j$. すると

$$[a,x_0] = [a,x] \cup (x,x_0] \subset (\cup_{j\in J} U_j) \cup U_h = \cup_{j\in J\cup\{h\}} U_j.$$

つまり $[a,x_0]$ は有限開被覆 $\{U_j \mid j \in J \cup \{h\}\}$ を持つ. 従って $x_0 \in X$.

(3) $X \subset [a,b]$ より $x_0 \leq b$. $x_0 < b$ と仮定すると, (2) より $x_0 < y \leq b$ なる任意の y は X に含まれない. 一方で有限部分集合 $J \subset I$ があって $[a,x_0] \subset \cup_{j\in J} U_j$ だから, 特にある $k \in J$ があって $x_0 \in U_k$. U_k は開集合だから, ある $y \in U_k$ があって $x_0 < y \leq b$. すると $y \in U_k \subset \cup_{j\in J} U_j$ となり, 「$x_0 < y \leq b$ なる任意の y は X に含まれない」と矛盾する.

問題 2.12. 問題 2.9 より $f(X) \subset \mathbb{R}$ はコンパクト集合. Heine-Borel の定理より $f(X) \subset \mathbb{R}$ は有界閉集合. すると問題 2.10 より $y := \sup f(X)$ は $y \in f(X)$ を満たす. つまり $y = f(x_0)$ なる $x_0 \in X$ が存在する.

以上です.