数学演習 VII · VIII 4 月 18 日分問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

2 復習 2 (位相空間と連続写像)

各問題の冒頭にある $*$ の数は, その問題の難易度の目安を表しています.

2.1 位相空間の基本概念

定義. X を集合, $\mathcal{T}$ をその部分集合の族とする. 組 $(X,\mathcal{T})$ は次の 3 条件を満たすとき**位相空間** (topological space) という.

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. • 任意の $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ に対し $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.
- 任意の部分族 $\{O_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{T}$ に対し $\cup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$.

位相空間 $(X,\mathcal{T})$ について, 各集合 $U \in \mathcal{T}$ を $(X,\mathcal{T})$ の**開集合** (open set) と呼ぶ.

定義. 集合 X の任意の点 x に対して, X の空でない部分集合の族 $\mathcal{U}_x$ が定められ, 次の 3 条件を満たすとき, $\{\mathcal{U}_x \mid x \in X\}$ を X **の近傍系** (neighborhood system) と呼ぶ.

- 任意の $U \in \mathcal{U}_x$ について $x \in U$.
- $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x$ ならば, $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ をみたす $U_3 \in \mathcal{U}_x$ が存在する.
- $U \in \mathcal{U}_x$ かつ $y \in U$ ならば, $V \subset U$ をみたす $V \in \mathcal{U}_y$ が存在する.

この時, 各 $U \in \mathcal{U}_x$ を x **の近傍** (neighborhood) と呼び, $\mathcal{U}_x$ を x **の近傍系**と呼ぶ.

近傍系を用いて位相空間を構成することができることを復習しよう.

問題 2.1 ($*$)**.** 集合 X とその近傍系 $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_x \mid x \in X\}$ が与えられているとする. X の部分集合の族 $\mathcal{T}$ を

$$V \in \mathcal{T} \overset{\text{def}}{\iff} \text{任意の } x \in V \text{ に対して } U \in \mathcal{U}_x \text{ が存在して } U \subset V.$$

と定める. このとき $(X,\mathcal{T})$ が位相空間になることを証明せよ.

これと逆の構成も存在する: 位相空間 $(X,\mathcal{T})$ が与えられたとき, 各 $x \in X$ に対し $\mathcal{U}_x := \{U \in \mathcal{T} \mid x \in U\}$ とすれば, $\mathcal{U} := \{\mathcal{U}_x \mid x \in X\}$ は X の近傍系である. そしてこの構成 $(X,\mathcal{T}) \mapsto \mathcal{U}$ と問題 2.1 の構成 $\mathcal{U} \mapsto (X,\mathcal{T})$ とは互いに逆になっている.

問題 2.2 ($*$)**.** n 次元実線形空間 $\mathbb{R}^n$ を考える. その標準内積から定まる $x, y \in \mathbb{R}^n$ の距離を $|x-y|$ と書く. そして $x \in \mathbb{R}^n$ と $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して $U(x;\varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < \varepsilon\}$ を (x を中心とする半径 ε の) 開球とする. このとき, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\mathcal{U}_x := \{U(x;\varepsilon) \mid \ \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

とおくと, $\{\mathcal{U}_x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の近傍系になることを示せ.

定義. 問題 2.2 の近傍系に対して問題 2.1 を適用して得られる位相空間 $(\mathbb{R}^n,\mathcal{T})$ を n 次元 **Euclid 空間** (Euclidean space) と呼ぶ.

[*1] 2019/04/12, ver. 0.2.

以下, 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ のことを単に X と書くことにする.

部分集合 $Y \subset X$ は $Y^c = X \setminus Y$ が X の開集合であるとき X の**閉集合** (closed set) というのであった.

問題 2.3 $(*)$**.** 次の各場合に A が 1 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}$ の開集合か閉集合か, どちらでもないかを判定せよ.

(1) $A = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.　　(2) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$.

2.2 閉包, 内点, 境界点

以下 $X = (X, \mathcal{T})$ を位相空間とし, $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_x \mid x \in X\}$ を X の位相を与えるような近傍系とする.

定義. 位相空間 X の部分集合 $A \subset X$ を考える. A の X における**閉包** $\overline{A}$ (closure) を以下のように定義する.

$$\overline{A} := \{x \in X \mid x \text{ の任意の近傍 } U \in \mathcal{U}_x \text{ に対し } U \cap A \neq \emptyset.\}$$

位相空間 X の任意の部分集合 A について $A \subset \overline{A}$ となる. また部分集合 A, B に対して以下の主張が成立することを各自確認せよ.

- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
- $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
- $A \subset B$ ならば $\overline{A} \subset \overline{B}$.

定義. 位相空間 X の元 $x \in X$ と部分集合 $A \subset X$ について

(1) $U \subset A$ となる x の近傍 U が存在するとき, x は A の**内点** (interior point) であるという.

(2) $U \subset X \setminus A$ となる x の近傍 U が存在するとき, x は A の**外点** (exterior point) であるという.

(3) 内点でも外点でもない $x \in X$ を A の**境界点** (boundary point) という.

A の内点全体の集合を A の**内部** (interior) と呼び A° と書く. A の境界点全体の集合を A の**境界** (boundary) と呼び ∂A と書く. 外点全体の集合を**外部** (exterior) と呼ぶ.

位相空間 X の部分集合 A に対して以下の主張が成立することを各自確認せよ.

- A° は X の開集合.
- $A^\circ \neq A$ ならば, A は X の開集合ではない.
- $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$.

また部分集合 A, B に対して以下の主張が成立することも確認せよ.

- $\overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ$.
- $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.
- $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.
- $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

2.3 連続写像

定義 2.1. $(X, \mathcal{T}_1)$ と $(Y, \mathcal{T}_2)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を写像とする. 任意の開集合 $U \subset Y$ に対して $f^{-1}(U) \subset X$ が X の開集合となるとき, f は**連続** (continuous) であるという.

次の主張を各自確認しておくこと: X, Y, Z を位相空間, $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ を連続写像とすると, 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ も連続である.

問題 2.4 $(*)$**.** Euclid 空間の間の写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を考える. 連続性の定義 2.1 は, 以下の ε-δ 論法で与えられるものと同値であることを示せ.

$$\text{任意の } x \in X \text{ と任意の } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \text{ に対し, ある } \delta \in \mathbb{R}_{>0} \text{ が存在して, } f\big(U(x;\delta)\big) \subset U(f(x);\varepsilon).$$

定義. X,Y を位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像とする. 連続写像 $g : Y \to X$ が存在して $g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ となるとき, f は**同相写像** (homeomorphism) であるという. またこの時, 位相空間 X,Y は**同相** (homeomorphic) であるという.

問題 2.5 $(*)$**.** 位相空間 X,Y が同相のとき $X \simeq Y$ と書く. この二項関係 $\simeq$ が同値関係であることを示せ.

2.4 部分空間とコンパクト性

定義. $(X,\mathcal{T})$ を位相空間とし, 部分集合 $A \subset X$ を考える. A の部分集合の族 $\mathcal{T}_A$ を

$$V \in \mathcal{T}_A \overset{\mathrm{def}}{\iff} \exists U \in \mathcal{T},\ V = U \cap A$$

と定義する. このとき $(A,\mathcal{T}_A)$ は位相空間になる. $\mathcal{T}_A$ で定義される A の位相を, X から A に誘導された**部分空間位相** (subspace topology) と呼ぶ. また $(A,\mathcal{T}_A)$ を (X,T) の**部分空間** (subspace) と呼ぶ.

今までと同様に, $X = (X,\mathcal{T})$, $A = (A,\mathcal{T}_A)$ などと略記することにする. また位相空間 X の部分集合 $A \subset X$ が与えられたら, 何も言わない限り X から A に誘導された部分空間位相を考えて, A を X の部分空間とみなすことにする.

問題 2.6 $(*)$**.** 以下の写像 $f : X \to Y$ のうち, 同相写像であるものはどれか.

(1) $X = \mathbb{R}$, $Y = (-1,1) \subset \mathbb{R}$, $f(x) = x/(1+|x|)$.

(2) $X = [0,1) \subset \mathbb{R}$, $Y = S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$, $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$.

(3) $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$, $N := (0,0,1) \in S^2$ として, $X = S^2 \setminus \{N\}$, $Y = \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$.

定義. X を位相空間とし. $A \subset X$ を部分集合とする.

(1) I を添字集合とする X の開集合からなる族 $\{U_i \mid i \in I\}$ を考える. $A \subset \cup_{i\in I} U_i$ が成り立つとき, $\{U_i \mid i \in I\}$ を A の**開被覆** (open covering) という.

(2) A の任意の開被覆 $\{U_i \mid i \in I\}$ が有限部分被覆を持つ, つまりある有限部分集合 $J \subset I$ があって $A \subset \cup_{i\in J} U_i$ となるとき, A は**コンパクト** (compact) であるという.

問題 2.7 $(*)$**.** Euclid 空間 $\mathbb{R}$ はコンパクトでないことを証明せよ.

問題 2.8 $(*)$**.** X をコンパクトな位相空間とし, $F \subset X$ を閉集合とする.

(1) $\{U_i \mid i \in I\}$ を F の開被覆としたとき, $V_i := U_i \cup (X \setminus F)$ とおくと, $\{V_i \mid i \in I\}$ は X の開被覆になることを示せ.

(2) $F \subset X$ はコンパクトであることを証明せよ.

問題 2.9 $(*)$**.** X,Y を位相空間とし, $f : X \to Y$ を連続写像とする. $A \subset X$ がコンパクトならば $f(A) \subset Y$ もコンパクトになることを証明せよ.

2.5 Euclid 空間とコンパクト性

Euclid 空間におけるコンパクト部分空間の分類定理である, **Heine-Borel の定理**を復習しよう. そのために実数 $\mathbb{R}$ にまつわる基本的な用語と性質を復習する.

定義. 部分集合 $X \subset \mathbb{R}$ が与えられているとする.

(1) 実数 $a \in \mathbb{R}$ について, 任意の $x \in X$ に対して $x \leq a$ となるとき, a は X の**上界** (upper bound) であるという. 任意の $x \in X$ に対して $a \leq x$ となるとき, a は X の**下界** (lower bound) であるという.

(2) X の上界が存在するとき, X は**上に有界**であるという. 同様に, X に下界が存在するとき, X は**下に有界**であるという. X が上にも下にも有界なとき, X は**有界** (bounded) であるという.

定義. 部分集合 $X \subset \mathbb{R}$ と実数 $a \in \mathbb{R}$ が与えられているとする.

(1) a が以下の 2 つの条件を満たすとき, a は X の**上限** (supremum) であるといい, $a = \sup X$ と書く.

(i) a は X の上界である.　(ii) $b < a$ となる任意の $b \in \mathbb{R}$ は X の上界でない.

(2) a が以下の 2 つの条件を満たすとき, a は X の**下限** (infimum) であるといい, $a = \inf X$ と書く.

(i) a は X の下界である.　(ii) $b > a$ となる任意の $b \in \mathbb{R}$ は X の下界でない.

実数の連続性と同値な, 次の結果が知られている.

事実 2.2. 部分集合 $X \subset \mathbb{R}$ に対して, X が上に有界ならば, X の上限が存在する.

問題 2.10 ($*$)**.** $X \subset \mathbb{R}$ を有界閉集合とする. このとき X の上限 $\alpha := \sup X$ は $\alpha \in X$ をみたすことを示せ.

次に $\mathbb{R}$ の閉区間がコンパクトであることを証明しよう.

問題 2.11 ($*$)**.** $\{U_i \mid i \in I\}$ を区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ の開被覆とする. 次のことを証明せよ.

(1) 部分集合 $X \subset \mathbb{R}$ を $X := \{x \in [a, b] \mid$ 区間 $[a, x]$ は有限個の U_i で覆われる $\}$ で定める. このとき $X \neq \emptyset$ であり, X は有界である.

(2) $x_0 := \sup X$ とすると $x_0 \in X$.　(3) $x_0 = b$.

問題 2.11 の主張を合わせて, 任意の閉区間 $[a, b]$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合であることが分かった.
より一般に $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合を分類するのが Heine-Borel の定理だった.

事実 2.3 (Heine-Borel の定理)**.** n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ について

$$X \text{ がコンパクト} \iff X \text{ が有界閉集合}$$

問題 2.12 ($*$)**.** X をコンパクトな位相空間とし, $f : X \to \mathbb{R}$ を連続写像とする. このとき f は最大値をもつ, つまり $f(x_0) = \sup\{f(x) \mid x \in X\}$ をみたす $x_0 \in X$ が存在することを証明せよ.

2.6 レポート問題

前回と同様, レポートの締め切りは (今学期末までという自明なものを除いて) 特に設けません.

レポート問題 2.1 ($**$)**.** 実数の定義を述べ, それから事実 2.2 を導け.

レポート問題 2.2 ($*$)**.** Heine-Borel の定理 (事実 2.3) を示せ.

以上です.