数学演習 VII・VIII　4 月 11 日分解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

1　復習 1 (集合と写像, 同値関係と商集合)

1.1　集合と写像に纏わる基本概念

問題 1.1. f_A が全単射 $\iff \operatorname{rank} A = n \iff \det A \neq 0$.

1.2　同値関係と商集合

問題 1.2. 略.

問題 1.3. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) は略. (iii) $\Rightarrow$ (i) について, $C(x) \cap C(y)$ の元 z を取ると $z \sim x$ かつ $z \sim y$ なので, 対称律と推移律によって $x \sim y$.

問題 1.4. 写像 $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$, $(x,y) \mapsto x-y$ から写像

$$f : \mathbb{N}^2/\sim \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \overline{(x,y)} \longmapsto x-y$$

が誘導されることに注意する. 実際, $(x,y) \sim (x',y')$ ならば $x-y = x'-y'$ だから f は well-defined. また

$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}^2/\sim, \quad x \longmapsto \overline{(x,0)}$$

を考えると, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^2/\sim}$ と $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ が確認できる. よって f は全単射. また

$$f(\overline{(x+x', y+y')}) = (x+x') - (y+y') = (x-y) + (x'-y') = f((\overline{x,y})) + f((\overline{x',y'}))$$

なので f は条件を満たす.

問題 1.5. (1) well-defined ではない.　(2) well-defined.　(3) well-defined.

問題 1.6. 略.

1.3　集合の濃度

問題 1.7.
(i) 恒等写像 $\mathrm{id}_X : X \to X$ があるので $X \sim X$.
(ii) 仮定より全単射 $f : X \to Y$ があるが, その逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ の存在から $Y \sim X$.
(iii) 仮定より全単射 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ がある. 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ は全単射なので $X \sim Z$.

問題 1.8. 全単射 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ を構成すれば良い. 例えば, $n \in \mathbb{N}$ に対し $k^2 \leq n < (k+1)^2$ なる $k \in \mathbb{N}$ が一意に定まるが, それを用いて次のように f を定めれば全単射になる.

$$f(n) := \begin{cases} \bigl(k, n-k^2\bigr) & n \leq k^2 + k \text{ のとき}, \\ \bigl((k+1)^2 - n - 1, k\bigr) & \text{それ以外} \end{cases}$$

[*1] 2019/04/11 版, ver. 0.2.

問題 1.9. 全単射 $P(X) \to 2^X$ を構成すれば良い．まず $A \in P(X)$, つまり部分集合 $A \subset X$ に対して写像 $\chi_A : X \to \{0,1\}$ を

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

で定義する．ヒントより $\chi_A \in 2^X$ と思えるから, 対応 $A \mapsto \chi_A$ で写像 $f : P(X) \to 2^X$ が定まる．

次に $\chi \in 2^X$ を写像 $\chi : X \to \{0,1\}$ とみなし,

$$A_\chi := \{x \in X \mid \chi(x) = 1\}$$

と定義すると $A \in P(X)$. よって対応 $\chi \mapsto A_\chi$ によって写像 $g : 2^X \to P(X)$ が定まる．

定義から容易に $f \circ g = \mathrm{id}_{2^X}$ および $g \circ f = \mathrm{id}_{P(X)}$ が確認できる．よって f は全単射である．

問題 1.10. (1) *2 略解だけ述べる．$A, B \subset 2^{\mathbb{N}}$ を

$$A := \{(x_n) \in 2^{\mathbb{N}} \mid x_n = 0 \text{ となる } n \text{ は有限個 }\}, \quad B := 2^{\mathbb{N}} \setminus A$$

と定める．$g : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ を

$$g((x_n)) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}$$

で定めると, 次の 3 つの主張が示せる．

- g の A への制限 $g|_A : A \to (0,1]$ は可逆.
- g の B への制限 $g|_B : B \to [0,1)$ は単射.
- $a = (a_n) \in A \setminus \{(1,1,\ldots)\}$ とする．$n_0 \in \mathbb{N}$ を "任意の $n > n_0$ について $a_n = 1$"となる最小のものとする．そして $b = (b_n) \in 2^{\mathbb{N}}$ を

$$b_n := \begin{cases} a_n & n < n_0 \text{ のとき}, \\ 1 & n = n_0 \text{ のとき}, \\ 0 & n > n_0 \text{ のとき} \end{cases}$$

  で定める．すると $b \in B$ であり, また b は $a \neq b$ かつ $g(a) = g(b)$ となる唯一の $2^{\mathbb{N}}$ の元である．更に対応 $a \mapsto b$ によって単射 $i : A \setminus \{(1,1,\ldots)\} \hookrightarrow B$ が定まる．

そこで $h : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ を

$$h(x) := \begin{cases} 1 & x = (1,1,\ldots), \\ g(i(x))/2 & x \in A \setminus \{(1,1,\ldots)\}, \\ 1/2 + g(x)/2 & x \in B \end{cases}$$

と定めれば h は単射．よって $\mathrm{Card}(2^{\mathbb{N}}) \leq \mathrm{Card}([0,1])$. 逆に $g|_A$ の逆写像 $(0,1] \to A$ と適当な写像 $\{0\} \to B$ から単射 $[0,1] \to 2^{\mathbb{N}}$ が得られるから $\mathrm{Card}(2^{\mathbb{N}}) \leq \mathrm{Card}([0,1])$. よって $\mathrm{Card}(2^{\mathbb{N}}) = \mathrm{Card}([0,1])$.

(2) 存在しない．実際, (1) と問題 1.9 より $\mathrm{Card}([0,1]) = \mathrm{Card}(2^{\mathbb{N}}) = \mathrm{Card}\, P(\mathbb{N})$ だが, 本文の命題 1.1 より $\mathrm{Card}\,\mathbb{N} < \mathrm{Card}\, P(\mathbb{N})$ なので $\mathrm{Card}\,\mathbb{N} \neq \mathrm{Card}([0,1])$.

以上です.

*2 ver. 0.2 で追記しました.