数学演習 VII・VIII 4 月 11 日分問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/2019S78.html

1 復習 1 (集合と写像, 同値関係と商集合)

全問通じて $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ は非負整数全体の集合を表します.
各問題の冒頭にある $*$ の数はその問題の難易度の目安を表しています.

1.1 集合と写像に纏わる基本概念

各自, 以下の集合に関する概念の定義や記号を確認しておくこと.

空集合 $\emptyset$, 集合の元 $a \in A$, 部分集合 $B \subset A$;
和集合 $A \cup B$, 共通部分 $A \cap B$, 差集合 $A \setminus B$, 補集合 A^c;
積集合 $A \times B$, A^n, $A^I = \prod_{i \in I} A_i$.

また以下の写像に関する概念の定義や記号を確認しておくこと.

写像 $f : X \to Y$ の定義域 X, 値域 Y, 像 $\mathrm{Im}(f) \subset Y$;
写像の単射性と全射性, 全単射;
写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ の合成 $g \circ f : X \to Z$.

問題 1.1 ($*$)**.** 複素数成分の n 次正方行列 A に対し, 写像 $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ を $f_A(x) := Ax$ で定義する. 但しここでは $x \in \mathbb{C}^n$ を $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ のように縦ベクトルとみなし, 行列の積 Ax を取っている. f_A が全単射であるために A が満たすべき必要十分条件を述べよ.

1.2 同値関係と商集合

二項関係 $\sim$ は以下の三条件を満たすとき**同値関係** (equivalence relation)[*2] といった.
(i) $X \sim X$. (ii) $X \sim Y$ ならば $Y \sim X$. (iii) $X \sim Y$ かつ $Y \sim Z$ ならば $X \sim Z$.

問題 1.2 ($*$)**.** 次の関係 $\sim$ が同値関係であることを示せ.
(1) $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. $\mathbb{Z}$ において $x \sim y \overset{\mathrm{dfn}}{\iff} x - y \in m\mathbb{Z}$.
(2) $\mathbb{N}^2$ において $(x, y) \sim (x', y') \overset{\mathrm{dfn}}{\iff} x + y' = x' + y$.
(3) V を体 K 上の線形空間, W をその部分空間とする. V において $x \sim y \overset{\mathrm{dfn}}{\iff} x - y \in W$.

定義. 集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとする. $x \in X$ に対して

$$C(x) := \{y \in X \mid y \sim x\}$$

[*1] 2019/04/11 版, ver. 0.2.
[*2] ver. 0.2 で英語を追記しました.

で定まる X の部分集合 $C(x)$ を, x の $\sim$ に関する**同値類** (equivalence class) と呼ぶ. また $C(x)$ の元 y を $C(x)$ の**代表元** (representative) と呼ぶ.

問題 1.3 $(*)$**.** 集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとする. 任意の $x, y \in X$ に対して, 次の 3 つの条件が互いに同値であることを示せ.

(i) $x \sim y$.　　(ii) $C(x) = C(y)$.　　(iii) $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$.

この主張から, 同値類の全体は集合 X を互いに交わらない部分集合に分割することが分かる.

定義. $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする.

(1) 同値類全体の集合を集合 X の同値関係 $\sim$ による**商集合** (quotient set) とよび, $X/\sim$ で表す.

(2) $x \in X$ にその同値類 $C(x) \in X/\sim$ を対応させる写像

$$X \longrightarrow X/\sim, \qquad x \longmapsto C(x)$$

を X から $X/\sim$ への**自然な射影** (natural projection) と呼ぶ. $X/\sim$ の定義からこの写像は全射である.

問題 1.4 ($*$ **整数の構成**)**.** 問題 1.2 (2) の同値関係 $\sim$ による $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ の同値類を $\overline{(x, y)} \in \mathbb{N}/\sim$ と書く. 商集合 $\mathbb{N}^2/\sim$ から整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ への全単射

$$f : (\mathbb{N}^2/\sim) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

であって, $f(\overline{(x + x', y + y')}) = f(\overline{(x, y)}) + f(\overline{(x', y')})$ を満たすものを 1 つ求めよ.

定義. $\sim$ を集合 X 上の同値関係とし, $p : X \to X/\sim$ を自然な射影とする. 部分集合 $S \subset X$ への p の制限 $p|_S : S \to X/\sim$ が全単射であるとき, S を $X/\sim$ の**完全代表系** (complete system of representatives) とよぶ.

例. 問題 1.2 (1) の同値関係 $\sim$ による $\mathbb{Z}$ の商集合を $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ と書く. $S := \{0, 1, \ldots, m - 1\}$ は $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の完全代表系であり, $|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}| = m$ である.

問題 1.5 $(*)$**.** 問題 1.2 (1) で $m = 3$ とした場合の同値関係 $\sim$ による商集合 $\mathbb{Z}/\sim$ を $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ と書く. また $n \in \mathbb{Z}$ の $\sim$ による同値類を $\overline{n} \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ と書くことにする.

(1) 写像 $f : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(\overline{n}) := 2n$ は well-defined か否か述べよ.

(2) 写像 $f : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $f(\overline{n}) := \overline{2n}$ は well-defined か否か述べよ.

(3) 写像 $f : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $f(\overline{m}, \overline{n}) := \overline{mn}$ は well-defined か否か述べよ.

問題 1.6 $(*)$**.** 問題 1.2 (3) の同値関係による商集合 $V/\sim$ を V/W と書く. また $v \in V$ の $\sim$ による同値類 $C(v) \in V/W$ を $\overline{v}$ と書くことにする.

(1) $a : V/W \times V/W \to V/W$, $a(\overline{v}, \overline{w}) := \overline{v + w}$ が well-defined であることを示せ.

(2) $s : K \times V/W \to V/W$, $s(k, \overline{v}) := \overline{kv}$ が well-defined であることを示せ.

(3) V/W が K 上の線形空間であることを示せ.

1.3 集合の濃度

問題 1.7 $(*)$**.** 集合 X, Y に対して全単射 $f : X \to Y$ が存在するとき $X \sim Y$ と定める. $\sim$ は同値関係であることを示せ.

定義. X, Y を集合とする.

(1) 全単射 $X \to Y$ があるとき, X の濃度と Y の**濃度は等しい** (the same cardinality) といい, $\mathrm{Card}\, X = \mathrm{Card}\, Y$ と書く.

(2) 単射 $X \to Y$ があるとき, X の濃度は Y の**濃度以下**であるといい, $\mathrm{Card}\, X \le \mathrm{Card}\, Y$ と書く.

(3) $\mathrm{Card}\, X \le \mathrm{Card}\, Y$ であるが $\mathrm{Card}\, X = \mathrm{Card}\, Y$ でないとき, $\mathrm{Card}\, X < \mathrm{Card}\, Y$ と書く.

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して集合

$$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$$

を考える. 集合 X が $\mathrm{Card}\, X = \mathrm{Card}([n])$ を満たすとき, $|X| = n$ と書く. これは "集合 X の元の個数は n 個" ということに他ならない.

事実 (Bernstein の定理)**.** 集合 X, Y について, 2 つの単射 $f : X \to Y$ と $g : Y \to X$ が存在する[*3]とき, 全単射 $X \to Y$ が存在する.

証明は, 例えば参考文献 [斎藤 09] の命題 7.2.2 を参照すること.

この事実から次の主張が従う.

$$\mathrm{Card}\, X \le \mathrm{Card}\, Y \text{ かつ } \mathrm{Card}\, Y \le \mathrm{Card}\, X \text{ ならば } \mathrm{Card}\, X = \mathrm{Card}\, Y.$$

問題 1.8 $(*)$**.** $\mathbb{N}$ を非負整数全体の集合とする. $\mathrm{Card}\, \mathbb{N} = \mathrm{Card}(\mathbb{N}^2)$ を示せ.

命題 1.1. 集合 X に対し, その部分集合全体からなる集合を X の**冪集合** (power set) とよび $P(X)$ と書く. すると

$$\mathrm{Card}\, X < \mathrm{Card}\, P(X).$$

証明. 全射 $X \to P(X)$ が存在しないことを示せば十分. これを**対角線論法**で示そう. $f : X \to P(X)$ が全射だと仮定する. 部分集合 $A \subset X$ を $A := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ で定める. f は全射で $A \in P(X)$ だから, ある $a \in X$ があって $A = f(a)$. ここで $a \in A$ とすると, A の定義より $a \notin f(a) = A$ となり矛盾. また $a \notin A$ とすると, A の定義より $a \in f(a) = A$ となり矛盾. よって全射 f は存在しない. □

問題 1.9 $(**)$**.** 積集合 $\{0, 1\}^X$ のことを 2^X と書くことにする. $\mathrm{Card}\, P(X) = \mathrm{Card}(2^X)$ を示せ.

(ヒント: 集合 A, I に対し, 積集合 $A^I = \prod_{i \in I} A$ は I から A への写像の集合 $\mathrm{Map}(I, A)$ と同一視できる.)

問題 1.10 $(**)$**.** $\mathbb{N}$ を非負整数全体の集合とし, $[0, 1]$ を実閉区間 $\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \le r \le 1\}$ とする. また前問に引き続き, 積集合 $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ のことを $2^{\mathbb{N}}$ と書くことにする.

(1) $\mathrm{Card}([0, 1]) = \mathrm{Card}(2^{\mathbb{N}})$ を示せ. (ヒント: 実数の 2 進展開を考えるとよい.) [*4]

(2) 全単射 $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$ が存在するか否か考察せよ.

[*3] ver. 0.2 で訂正しました.

[*4] ver. 0.2 で問題を少し変えました.

なお, 選択公理を仮定すると次の主張が示せる.

事実. 集合 X, Y について, 全射 $f : X \to Y$ が存在すれば単射 $Y \to X$ が存在する. 特に $\mathrm{Card}\, Y \leq \mathrm{Card}\, X$.

証明は, 例えば参考文献 [斎藤 09] の命題 2.7.5 を参照すること.

レポート問題

レポートの締め切りは (今学期末までという自明なものを除いて) 特に設けません.

レポート問題 1.1 (∗ 線形空間のテンソル積)**.** V と W を (体 K 上の) 線形空間とする.

(1) 次の性質を満たす線形空間 T と双線形写像 $\tau : V \times W \to T$ の組 (T, τ) が同型を除いて[*5] 一意に存在することを示せ.

- 任意の双線形写像 $\varphi : V \times W \to U$ に対し, $\psi \circ \tau = \varphi$ となる線形写像 $\psi : T \to U$ がただ一つ存在する.

T のことを $V \otimes_K W$ ないし $V \otimes W$ と書き, V と W の**テンソル積**と呼ぶ.

(2) $(v, w) \in V \times W$ に対し, (1) の写像 τ を用いて

$$v \otimes w := \tau(v, w) \in T = V \otimes W$$

と定める. このとき, もし $\{v_i \mid i \in I\}$ と $\{w_j \mid j \in J\}$ がそれぞれ V と W の基底ならば,

$$\{v_i \otimes w_j \mid (i, j) \in I \times J\}$$

が $V \otimes W$ の基底になることを示せ.

参考文献

[斎藤 09] 斎藤毅 **「集合と位相」** 大学数学の入門 8, 東京大学出版会 (2009).

以上です.

[*5] ver. 0.2 で「同型を除いて」を追加しました.