2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　01 月 17 日分レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

12 Jacobi 多様体

12.1 閉 Riemann 面の周期と Albanese 多様体

この副節では R を種数 g の閉 Riemann 面とする.

定義 12.1.1. (1) ホモロジー群 $H_1(R,\mathbb{Z})$ の基底 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_g,\beta_1,\dots,\beta_g\}$ は, 交点数が

$$\alpha_i\cdot\alpha_j = 0 = \beta_i\cdot\beta_j,\quad \alpha_i\cdot\beta_j = \delta_{ij}$$

となるとき**シンプレクティック基底**と呼ばれる.

$H_1(R,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_g,\beta_1,\dots,\beta_g\}$ として, R 上の一点 P_0 を始点とする $2g$ 本の閉曲線からなるもので, それらで R を切り開くと $4g$ 角形になるものがある (下図 12.1 参照).

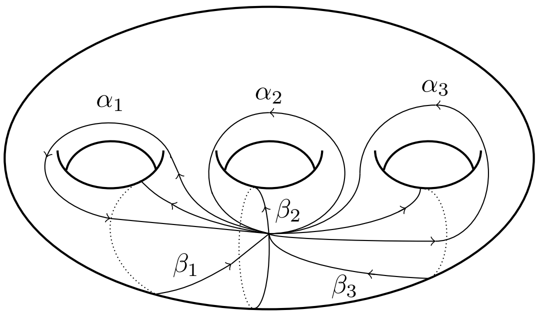

図 12.1　$g=3$ の場合のシンプレクティック基底

定義. 種数 g の閉 Riemann 面 R に対し, 周期行列 Ω から定まる主偏極 Abel 多様体 $\mathbb{C}^g/\Omega$ を R の **Albanese 多様体** (Albanese variety) と呼び, $\operatorname{Alb} R$ と表す.

12.2 Jacobi 多様体

曲線の Picard 多様体の記述 (命題 10.3.1) を思い出そう. $\mathbb{C}$ 上の非特異完備代数曲線の代わりに, 対応する種数 g の閉 Riemann 面 R で書くと $\operatorname{Pic}^0 R = H^1(R,\mathcal{O}_R)/H^1(R,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^{2g}$.

定理 12.2.1. $\operatorname{Alb} R \simeq \operatorname{Pic}^0 R$.

証明の概略. [小林05, §9.2] の証明を紹介する. まず $\operatorname{Pic}^0 R$ について考える. Hodge 分解 $H^1(R,\mathbb{C}) = H^{1,0}\oplus H^{0,1}$, $H^{1,0} := H^0(R,\Omega_R)$, $H^{0,1} := H^1(R,\mathcal{O}_R) \simeq \overline{H^{1,0}}$ から

$$\operatorname{Pic}^0 R \simeq H^{0,1}/\pi^{0,1}(H^1(R,\mathbb{Z})) \tag{12.1}$$

[*1] 2019/01/16 版, ver. 0.2.

となる. 但し $\pi^{0,1} : H^1(R,\mathbb{C}) \to H^{0,1}$ は射影であり, また自然な埋め込み写像によって $H^1(R,\mathbb{Z}) \subset H^1(R,\mathbb{C})$ とみなしている. $\operatorname{Alb} R$ についても同様に, 双対空間の Hodge 分解 $H_1(R,\mathbb{C}) \simeq H^1(R,\mathbb{C})^* = H_{1,0} \oplus H_{0,1}$, $H_{1,0} := (H^{1,0})^*$, $H_{0,1} := (H^{0,1})^*$ と射影 $\pi_{0,1} : H_1(R,\mathbb{C}) \to H_{0,1}$ を使って

$$\operatorname{Alb} R \;\simeq\; H^{0,1}/\pi^{0,1}(H^1(R,\mathbb{Z})). \tag{12.2}$$

式 (12.1) と (12.2) から, 線形同型 $\lambda : H^1(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_1(X,\mathbb{C})$ であって, $\pi(H^1(X,\mathbb{Z}))$ に制限すると格子の同型 $\lambda : \pi(H^1(X,\mathbb{Z})) \xrightarrow{\sim} \pi(H_1(X,\mathbb{Z}))$ を与えるものを構成すれば, 定理が証明される. λ は積分によるコホモロジーの非退化双線形型式

$$H^1(\mathbb{C}) \times H^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\varphi,\psi) \;=\; \int_R \varphi \wedge \psi$$

と Poincaré 双対の合成とすれば良い. □

問題 12.1 (∗)**.** λ が同型 $\pi(H^1(X,\mathbb{Z})) \xrightarrow{\sim} \pi(H_1(X,\mathbb{Z}))$ を与えることを示せ.

定義. 閉 Riemann 面 R に対し, 主偏極 Abel 多様体 $\operatorname{Alb} R \simeq \operatorname{Pic}^0 R$ を R の **Jacobi 多様体** (Jacobi variety) と呼び, $\operatorname{Jac} R$ で表す.

12.3　テータ因子

以下 $e(z) := \exp(2\pi\sqrt{-1}z)$ と略記する.

定義. Siegel 上半空間の点 $\tau \in \mathfrak{H}_g$ と $z \in \mathbb{C}^g$ に対し

$$\theta(\tau,z) \;:=\; \sum_{l \in \mathbb{Z}^g} e\bigl(l\tau{}^t l/2 + l^t z\bigr)$$

とすると, θ は $\mathfrak{H}_g \times \mathbb{C}^g$ 上の正則関数を定める. これを **Riemann テータ函数**と呼ぶ.

問題 12.2 (∗)**.** Riemann テータ函数の擬周期性を確かめよ: $m,n \in \mathbb{Z}^g$ に対して

$$\theta(\tau, z + m\tau + n) \;=\; \theta(\tau,z) \cdot e\bigl(-m\tau{}^t m/2 - m^t(z+n)\bigr)$$

補題. $\tau \in \mathfrak{H}_g$ に対し, $\theta(\tau,z)$ は主偏極 Abel 多様体 $T = \mathbb{C}^g/\binom{\tau}{I_g}$ 上の複素直線束の切断とみなせる.

定義. R を種数 g の閉 Riemann 面とする. 次で定まる Jacobi 多様体 $\operatorname{Jac} R = \mathbb{C}^g/\binom{\tau}{I_g}$ の因子 Θ を**テータ因子** (theta divisor) と呼ぶ:

$$\Theta \;:=\; \{[z] \in \operatorname{Jac} R \mid \theta(\tau,z) = 0\}.$$

連絡事項

次回 1/24 (木) が最終回です. レポートの締め切りも次回の講義終了時刻です.

参考文献

[小林05] 小林昭七, **複素幾何**, 岩波書店, 2005.

以上です.