2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　01 月 17 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

12 Jacobi 多様体

今回は [上清08, §2.2] に従って閉 Riemann 面の周期を用いて定まる Jacobi 多様体を扱う. Jacobi 多様体が主偏極 Abel 多様体であることを説明し, テータ因子を導入する. そして Torelli の定理の主張の紹介もする.

12.1 閉 Riemann 面の周期と Albanese 多様体

この副節では R を種数 g の閉 Riemann 面とする.

定義 12.1.1. (1) ホモロジー群 $H_1(R,\mathbb{Z})$ の基底 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_g,\beta_1,\dots,\beta_g\}$ は, 交点数が

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = 0 = \beta_i \cdot \beta_j, \quad \alpha_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$$

となるとき**シンプレクティック基底**と呼ばれる.

(2) R 上の正則 1 次微分形式の空間 $H^{1,0}(R) = H^0(R,\Omega^1_R)$ の基底 $\{\omega_1,\dots,\omega_g\}$ に対し次で定まる $2g \times g$ 行列 Ω を R の**周期行列** (period matrix) という.

$$\Omega := \begin{pmatrix} \int_{\alpha_1}\omega_1 & \cdots & \int_{\alpha_1}\omega_g \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\alpha_g}\omega_1 & \cdots & \int_{\alpha_g}\omega_g \\ \int_{\beta_1}\omega_1 & \cdots & \int_{\beta_1}\omega_g \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\beta_g}\omega_1 & \cdots & \int_{\beta_g}\omega_g \end{pmatrix}.$$

以下では $2g$ 次正方行列

$$J := \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$$

を用いる. 但し I_g は g 次単位行列. 次の補題の証明は略す.

補題 12.1.2. 定義 12.1.1 の周期行列 Ω を考える. また, それとは別に, $H^{1,0}(R)$ の基底 $\{\omega'_1,\dots,\omega'_g\}$ と $H_q(R,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 $\{\alpha'_1,\dots,\alpha'_g,\beta'_1,\dots,\beta'_g\}$ から定まる周期行列を Ω' と書く. 基底の変換行列をそれぞれ

$$(\omega'_1 \cdots \omega'_g) = (\omega_1 \cdots \omega_g)A, \quad {}^t(\alpha'_1 \cdots \alpha'_g\, \beta'_1 \cdots \beta'_g) = M\, {}^t(\alpha_1 \cdots \alpha_g\, \beta_1 \cdots \beta_g)$$

と表す. このとき,

(1) $M \in \mathrm{Sp}(g,\mathbb{Z}) := \{M \in \mathrm{GL}(2g,\mathbb{Z}) \mid MJ{}^tM = J\}$. (2) $\Omega' = M\Omega A$.

[*1] 2019/01/23 版, ver. 0.4.

定理. 閉 Riemann 面の周期行列 Ω は以下の **Riemann の条件**を満たす.
(R1) ${}^t\Omega J\Omega = 0$.　(R2) $-\sqrt{-1}{}^t\Omega J\overline{\Omega} > 0$.

注意. Riemann の条件 (R1), (R2) は定理 11.2.6 の条件 (P1), (P2) の $E = J$ の場合である.

証明. $H_1(R,\mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 $\{\alpha'_1,\dots,\alpha'_g,\beta'_1,\dots,\beta'_g\}$ として, R 上の一点 P_0 を始点とする $2g$ 本の閉曲線からなるもので, それらで R を切り開くと $4g$ 角形になる, 標準的なものを選ぶ (下図 12.1 参照).

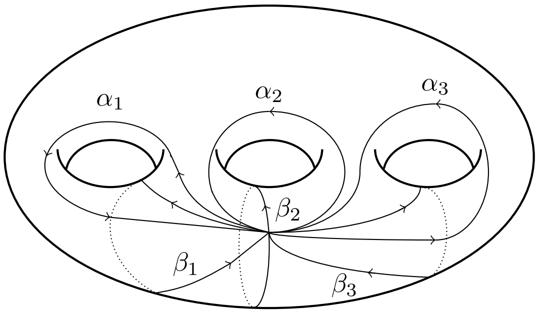

図 12.1　$g = 3$ の場合のシンプレクティック基底

切り開いてできる $4g$ 角形を R' と表し, α_k に対応する 2 つの辺を $\alpha_k^\pm$, β_k に対応する 2 つの辺を $\beta_k^\pm$ と表す. α_k の向き付けと比較して, α_k^+ は同じ向き付けを持ち, α_k^- は同じ向き付けを持つ. $\beta_k^\pm$ についても同様である. また, R' の辺は $\alpha_1^+,\beta_1^+,\alpha_1^-,\beta_1^-,\alpha_2^+,\beta_2^+,\alpha_2^-,\beta_2^-,\dots,\alpha_g^+,\beta_g^+,\alpha_g^-,\beta_g^-$ と並んでいる.

$H^{1,0}(R)$ の基底 $\{\omega_1,\dots,\omega_g\}$ を 1 つ選ぶ. $\omega_i\wedge\omega_j = 0$ より $\int_R \omega_i\wedge\omega_j = 0$. $i = 1,\dots,g$ に対し, R' 上の関数 $h_i(z)$ を $h_i(z) := \int_{P_0}^z \omega_i$ で定義すると, R' を含む領域上の正則関数に h_i を解析接続することができて $dh_i = \omega_i$.

以上から

$$\begin{aligned}
0 &= \int_R \omega_i\wedge\omega_j = \int_R' dh_i\wedge\omega_j = \int_R' d(h_i\omega_j) = \int_{\partial R'} h_i\omega_j \\
&= \sum_{k=1}^g \Big(\int_{\alpha_k^+} h_i\omega_j + \int_{\beta_k^+} h_i\omega_j - \int_{\alpha_k^-} h_i\omega_j - \int_{\beta_k^-} h_i\omega_j\Big) \\
&= \sum_{k=1}^g \Big(\int_{\alpha_k^+} h_i\omega_j + \int_{\beta_k^+} h_i\omega_j - \int_{\alpha_k^+} \big(h_i + \int_{\beta_k}\omega_i\big)\omega_j - \int_{\beta_k^+} \big(h_i - \int_{\alpha_k}\omega_i\big)\omega_j\Big) \\
&= \sum_{k=1}^g \Big(\int_{\alpha_k}\omega_i \int_{\beta_k^+}\omega_j \int_{\beta_k}\omega_i \int_{\alpha_k^+}\omega_j\Big).
\end{aligned}$$

この最右辺は $-{}^t\Omega J\Omega$ の (i,j) 成分だから, 条件 (R1) が示せた.

(R2) は $\omega_i\wedge\overline{\omega}_j = 0$ および $\omega_i\wedge\overline{\omega}_i > 0$ に上記と同様の議論を適用すればよい. □

系 12.1.3. 種数 g の閉 Riemann 面 R の正則 1 次微分形式の基底 $\{\omega_1,\dots,\omega_g\}$ を $\int_{\beta_i}\omega_j = \delta_{i,j}$ が成立するようにとると,

$$\tau = (\tau_{i,j})_{i,j=1}^g := \Big(\int_{\alpha_i}\omega_j\Big)_{i,j=1}^g$$

は g 次 Siegel 上半空間 $\mathfrak{H}_g$ の点であり, 周期行列 Ω は $\Omega = \binom{\tau}{I_g}$ となる. 特に, Ω から定まる g 次元複素トーラス $\mathbb{C}^g/\Omega$ は主偏極 Abel 多様体 (定義 11.3.5) の構造を持つ.

定義. 種数 g の閉 Riemann 面 R に対し, 周期行列 Ω から定まる主偏極 Abel 多様体 $\mathbb{C}^g/\Omega$ を R の **Albanese 多様体** (Albanese variety) と呼び, $\operatorname{Alb} R$ と表す.

注意. Albanese 多様体は一般次元のコンパクト複素多様体 M に対しても定義できる. 特にその次元は Hodge 数 $h^{1,0}(M) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(M, \Omega_M)$ に等しい. 詳しくは, 例えば [小林05, §6.7] を参照せよ.

12.2 Jacobi 多様体

曲線の Picard 多様体の記述 (命題 10.3.1) を思い出そう. $\mathbb{C}$ 上の非特異完備代数曲線の代わりに, 対応する種数 g の閉 Riemann 面 R で書くと $\operatorname{Pic}^0 R = H^1(R, \mathcal{O}_R)/H^1(R, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^{2g}$.

定理 12.2.1. $\operatorname{Alb} R \simeq \operatorname{Pic}^0 R$.

証明の概略. [小林05, §9.2] の証明を紹介する. まず $\operatorname{Pic}^0 R$ について考える. Hodge 分解 $H^1(R, \mathbb{C}) = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$, $H^{1,0} := H^0(R, \Omega_R)$, $H^{0,1} := H^1(R, \mathcal{O}_R) \simeq \overline{H^{1,0}}$ から

$$\operatorname{Pic}^0 R \;\simeq\; H^{0,1}/\pi^{0,1}(H^1(R, \mathbb{Z})) \tag{12.1}$$

となる. 但し $\pi^{0,1} : H^1(R, \mathbb{C}) \to H^{0,1}$ は射影であり, また自然な埋め込み写像によって $H^1(R, \mathbb{Z}) \subset H^1(R, \mathbb{C})$ とみなしている. $\operatorname{Alb} R$ についても同様に, 双対空間の Hodge 分解 $H_1(R, \mathbb{C}) \simeq H^1(R, \mathbb{C})^* = H_{1,0} \oplus H_{0,1}$, $H_{1,0} := (H^{1,0})^*$, $H_{0,1} := (H^{0,1})^*$ と射影 $\pi_{0,1} : H_1(R, \mathbb{C}) \to H_{0,1}$ を使って

$$\operatorname{Alb} R \;\simeq\; H^{0,1}/\pi^{0,1}(H^1(R, \mathbb{Z})). \tag{12.2}$$

式 (12.1) と (12.2) から, 線形同型 $\lambda : H^1(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H_1(X, \mathbb{C})$ であって, $\pi(H^1(X, \mathbb{Z}))$ に制限すると格子の同型 $\lambda : \pi(H^1(X, \mathbb{Z})) \xrightarrow{\sim} \pi(H_1(X, \mathbb{Z}))$ を与えるものを構成すれば, 定理が証明される. λ は積分によるコホモロジーの非退化双線形型式

$$H^1(\mathbb{C}) \times H^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\varphi, \psi) \;=\; \int_R \varphi \wedge \psi$$

と Poincaré 双対の合成とすれば良い. □

問題 12.1 (∗)**.** λ が同型 $\pi(H^1(X, \mathbb{Z})) \xrightarrow{\sim} \pi(H_1(X, \mathbb{Z}))$ を与えることを示せ.

定義. 閉 Riemann 面 R に対し, 主偏極 Abel 多様体 $\operatorname{Alb} R \simeq \operatorname{Pic}^0 R$ を R の **Jacobi 多様体** (Jacobi variety) と呼び, $\operatorname{Jac} R$ で表す.

12.3 テータ因子

Siegel 上半空間 $\mathfrak{H}_g := \{\tau \in \operatorname{Mat}(g, \mathbb{C}) \mid {}^t\tau = \tau, \operatorname{Im} \tau > 0\}$ の点 $\tau \in \mathfrak{H}_g$ に対し主偏極 Abel 多様体

$$T := \mathbb{C}^g/\left(\begin{smallmatrix} \tau \\ I_g \end{smallmatrix}\right)$$

が定まった. $\left(\begin{smallmatrix} \tau \\ I_g \end{smallmatrix}\right)$ の定める格子を $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ と書こう. つまり

$$\Lambda := \mathbb{Z}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{Z}\gamma_{2g}, \quad \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{2g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ I_g \end{pmatrix}.$$

この節では T の主偏極, つまり T 上の豊富な直線束を記述する.

定理 11.2.6 (Riemann の条件) の議論から, $T=\mathbb{C}^g/\binom{\tau}{I_g}$ より $\mathbb{C}^g$ 上の Hermite 形式が

$$H(z,w) \,:=\, z\,(\operatorname{Im}\tau)^{-1}\,{}^t\overline{w} \tag{12.3}$$

で定まる. Appell-Humbert の定理 11.2.3 より, 半指標 $\chi:\Lambda\to U(1)$ に対し, 保型因子

$$j(\lambda,z) := \chi(\lambda)\exp(\pi H(z,z)+\pi H(\lambda,\lambda)/2)$$

によって $\lambda\in\Lambda$ の $\mathbb{C}^g\times\mathbb{C}$ への作用を $(z,\zeta)\mapsto(z+\lambda, j(\lambda,z)\zeta)$ で定めると, $L(H,\chi):=(\mathbb{C}^g\times\mathbb{C})/\Lambda$ は $T=\mathbb{C}^g/\Lambda$ 上の直線束になる.

以下 $e(z):=\exp(2\pi\sqrt{-1}z)$ と略記する.

定義. Siegel 上半空間の点 $\tau\in\mathfrak{H}_g$ と $z\in\mathbb{C}^g$ に対し

$$\theta(\tau,z) \,:=\, \sum_{l\in\mathbb{Z}^g} e\bigl(l\tau^t l/2+l^t z\bigr)$$

とすると, θ は $\mathfrak{H}_g\times\mathbb{C}^g$ 上の正則関数を定める. これを **Riemann テータ函数**と呼ぶ.

問題 12.2 (∗)**.** Riemann テータ函数の擬周期性を確かめよ: $m,n\in\mathbb{Z}^g$ として

$$\theta(\tau,z+m\tau+n) \,=\, \theta(\tau,z)\cdot e\bigl(-m\tau^t m/2-m^t(z+n)\bigr)$$

Riemann テータ函数は $T=\mathbb{C}^g/\binom{\tau}{I_g}$ 上の豊富な直線束の切断とみなせる. このことを説明するために, まず $\tau\in\mathfrak{H}_g$ に対し, $\mathbb{C}^g$ 上の対称双線形型式 $S(z,w)$ を

$$S(z,w) := z\,(\operatorname{Im}\tau)^{-1}\,{}^t w$$

で定める.

$$\theta_0(\tau,z) := \exp(\pi S(z,z)/2)$$

は $\mathbb{C}^g$ 上で 0 になることはないので, T 上の自明な直線束 L_0 の切断とみなせる.

命題 12.3.1. $\tau\in\mathfrak{H}_g$ に対し, $\theta(\tau,z)$ は主偏極 Abel 多様体 $T=\mathbb{C}^g/\binom{\tau}{I_g}$ 上の複素直線束 $L(H,\chi_0)\otimes L_0^{-1}$ の切断とみなせる. 但し H は (12.3) で定めた Hermite 形式であり, $\chi_0:\Lambda\to U(1)$ は次で定まる半指標.

$$\chi_0(\lambda) \,:=\, \exp(\pi\sqrt{-1}m\,{}^t n), \quad \lambda=m\tau+n\in\Lambda.$$

証明. 簡単な計算で $g(z):=\theta_0(\tau,z)\theta(\tau,z)$ が

$$g(z+\lambda)=g(z)\cdot\exp(\pi\sqrt{-1}m^t n+\pi H(z,\lambda)+\pi H(\lambda,\lambda)/2), \quad \lambda=m\tau+n$$

を満たすことが分かる. これと Appell-Humbert の定理 11.2.3 から結論を得る. □

$\tau\in\mathfrak{H}_g$ より $H=(\operatorname{Im}\tau)^{-1}$ は正定値だから, 定理 11.2.4 (小平埋蔵定理の系) より直線束 $L(H,\chi_0)$ が豊富である. すると命題 12.3.1 よりテータ函数は T 上の豊富な直線束の切断であることが分かる.

$T=\mathbb{C}^g/\binom{\tau}{I_g}$ が周期行列を τ とする Riemann 面の Jacobi 多様体であることに注意して,

定義. R を種数 g の閉 Riemann 面とする. 次で定まる Jacobi 多様体 $\operatorname{Jac}R=\mathbb{C}^g/\binom{\tau}{I_g}$ の因子 Θ を**テータ因子** (theta divisor) と呼ぶ:

$$\Theta \,:=\, \{[z]\in\operatorname{Jac}R \mid \theta(\tau,z)=0\}.$$

12.4 Torelli の定理

定理 12.4.1 (Torelli の定理). R と R' を種数 g の閉 Riemann 面とし, Θ と Θ' をそれぞれ $\operatorname{Jac} R$ と $\operatorname{Jac} R'$ のテータ因子とする. このこのとき

$$\text{Riemann 面として } R \simeq R' \iff \text{主偏極 Abel 多様体として } (\operatorname{Jac} R, \mathcal{O}(\Theta)) \simeq (\operatorname{Jac} R', \mathcal{O}(\Theta)).$$

12.5 Abel-Jacobi 写像

この副節では R を種数 g の閉 Riemann 面とする.

$H_1(R, \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底 $\{\alpha_1, \ldots, \beta_g\}$ を固定し, 正則一次形式の基底 $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ を $\int_{\beta_i} \omega_j = \delta_{i,j}$ となるように取る. 系 12.1.3 より Jacobi 多様体 $\operatorname{Jac} R$ は複素トーラスとして $\mathbb{C}^g/\binom{\tau}{I_g}$ と表示できる.

以下では $z = (z_1, \ldots, z_g) \in \mathbb{C}^g$ の定める $\operatorname{Jac} R = \mathbb{C}^g/\binom{\tau}{I_g}$ の元を $[z] = [z_1, \ldots, z_g]$ と書く.

定義. $P_0 \in R$ を一つ取って固定する. P_0 を始点とする 1 次形式の線積分で定義される写像

$$\varphi : R \longrightarrow \operatorname{Jac} R, \quad Q \longmapsto \left[\int_{P_0}^{Q} \omega_1, \int_{P_0}^{Q} \omega_2, \ldots, \int_{P_0}^{Q} \omega_g \right]$$

は複素多様体の正則写像である. これを **Abel-Jacobi 写像**と呼ぶ.

Abel-Jacobi 写像は R の対称積上に拡張できる. 対称積の定義を思い出そう.

定義. R を Riemann 面とし, $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. 積多様体 R^d への対称群 S_d の自然な作用による商空間 $R^{(d)} := R^d/S_d$ は複素多様体になる.

注意. $R^{(d)}$ が複素多様体になることは R が 1 次元であることから従う. 2 次元以上だと複素解析空間にしかならない. 代数幾何的での対応物は以下の通り: 体 k 上の準射影多様体 X に有限群 G が作用しているとき, k 上の代数多様体 X/G と k スキームの全射 $\pi : X \twoheadrightarrow X/G$ であって, 次の 2 つの性質を満たすものが存在する.

(i) π のファイバーは G 軌道.

(ii) 任意の G 不変な k スキームの射 $\varphi : X \to Z$ は π を経由する.

定義. R を Riemann 面とし, $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. 写像

$$\varphi_d : R^{(d)} \longrightarrow \operatorname{Jac} R, \quad [Q_1, \ldots, Q_d] \longmapsto \left[\sum_{j=1}^{d} \int_{P_0}^{Q_j} \omega_1, \ldots, \sum_{j=1}^{d} \int_{P_0}^{Q_j} \omega_g \right]$$

は複素多様体の正則写像である. これも Abel-Jacobi 写像と呼ぶ.

定理 (Abel の定理). $\varphi_d : R^{(d)} \to \operatorname{Jac} R$ の各ファイバーは互いに線形同値な次数 d の有効因子からなる.

説明. 証明はしないが, 古典的な Abel の定理に帰着できることだけ説明する. Abel-Jacobi 写像を, R の因子に対して

$$\varphi : \operatorname{Div} R \longrightarrow \operatorname{Jac} R, \quad \textstyle\sum_{j=1}^{l} n_j Q_j \longmapsto \sum_{j=1}^{l} n_j \varphi(Q_j)$$

と拡張する. このとき示すべき主張は,

$$\deg D = \deg E \text{ となる } D, E \in \operatorname{Div} R \text{ について}, \ \varphi(D) = \varphi(E) \iff D \sim E.$$

これは元来の Abel の定理である．証明は [小林05, §9.3] を参照せよ． □

次に定義される W^d は Torelli の定理の証明で活躍することになるが, この講義では Torelli の定理の証明は割愛する．[上清08, §2.3] を参照せよ．

定義 12.5.1. R を種数 g の閉 Riemann 面とし, $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする．$\varphi_d : R^{(d)} \to \operatorname{Jac} R$ の像を W^d と記す．

φ_d は固有射なので, W^d は $\operatorname{Jac} R$ の閉部分代数多様体である．W^d に関する非自明な主張を 1 つ紹介する．

命題 12.5.2. 複素多様体の正則写像 $\widetilde{\varphi} : R \to \mathbb{C}^g$ を Abel-Jacobi 写像 φ の持ち上げ, 即ち

$$\widetilde{\varphi} : R \longrightarrow \mathbb{C}^g, \quad Q \longmapsto \Big(\int_{P_0}^{Q} \omega_1, \ldots, \int_{P_0}^{Q} \omega_g\Big)$$

とする．また $e = (e_1, \ldots, e_g) \in \mathbb{C}^g$ とする．

(1) e を固定して $\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(Q) - e)$ を Q に関する函数とみなしたとき．$\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(Q) - e) \not\equiv 0$ なら $\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(Q) - e)$ は重複度を込めて g 個の零点を持つ．

(2) $\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(Q) - e) \not\equiv 0$ のとき, $\theta(\tau, \widetilde{\varphi}(Q) - e)$ の零点を重複度を込めて $Q_1, \ldots, Q_g$ と記すと, $\operatorname{Jac} R = \mathbb{C}^g / \binom{\tau}{I_g}$ において

$$\textstyle\sum_{j=1}^{g} \varphi(Q_j) + [\kappa_1, \ldots, \kappa_g] \;=\; [e_1, \ldots, e_g]$$

となる $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_g) \in \mathbb{C}^g$ が周期 $\Omega = \binom{\tau}{I_g}$ の不定性を除いて存在する．また $[\kappa] \in \operatorname{Jac} R$ は $[e]$ に依存しない．

証明は [上清08, 補題 2.22] を参照せよ．

定義. 命題 12.5.2 (2) の $\kappa \in \mathbb{C}^g$ を **Riemann 定数**と呼ぶ．

注意. Riemann 定数 κ は $H_1(R, \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底の取り方に依存するが, それを固定すれば周期を法として一意に定まる．

定理 12.5.3. $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_g) \in \mathbb{C}^g$ を Riemann 定数とする．$\operatorname{Jac} R$ のテータ因子 Θ に関して

$$\Theta \;=\; W^{g-1} + [\kappa].$$

証明は [上清08, 定理 2.25] を参照せよ．

参考文献

[小林05] 小林昭七, **複素幾何**, 岩波書店, 2005.
[上清08] 上野健爾, 清水勇二, **複素構造の変形と周期**, 岩波書店, 2008.

以上です．