**2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　01 月 10 日分レポート問題**[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

# 11　複素トーラスと Abel 多様体

## 11.1　複素トーラス

**定義.** $g$ 次元 $\mathbb{C}$ 線形空間 $V$ の階数 $2g$ の格子 $\Lambda$ による商空間 $V/\Lambda$ は $g$ 次元コンパクト複素多様体である. これを $g$ 次元**複素トーラス**と呼ぶ.

**補題 11.1.1.** $\Lambda = \sum_{i=1}^{2g} \mathbb{Z}\lambda_i \subset V$ が階数 $2g$ の $V$ の格子 $\iff$ $\det(\Omega, \overline{\Omega}) \neq 0$. ただし $\Omega$ は次のように与えられる $2g \times g$ 行列: $\lambda_i = \sum_{j=1}^{g} a_{i,j} e_j$ と展開して, $\Omega := (a_{i,j})_{1 \le i \le 2g, 1 \le j \le g}$.

**問題 11.1** $(*)$**.** 補題 11.1.1 を示せ.

**定義.** 補題 11.1.1 の $\Omega := (a_{i,j}) \in \mathrm{Mat}(2g \times g, \mathbb{C})$ を複素トーラス $T = V/\Lambda$ の**周期行列**と呼ぶ.

**問題 11.2** $(**)$**.** $V_1/\Lambda_1$ と $V_2/\Lambda_2$ を $g$ 次元複素トーラスとする. 複素多様体としての正則写像 $V_1/\Lambda_1 \to V_2/\Lambda_2$ は全て, 線形写像 $f : V_1 \to V_2$ と $V_2/\Lambda_2$ の平行移動の合成であることを示せ.

**系 (命題 11.1.2 の系).** $\mathfrak{M} := \{\Omega \in \mathrm{Mat}(2g \times g, \mathbb{C}) \mid \det(\Omega, \overline{\Omega}) \neq 0\}$, $\mathfrak{T}_g := \mathrm{GL}(2g, \mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{M} / \mathrm{GL}(g, \mathbb{C})$ と定めると $\mathfrak{T}_g = \{g$ 次元複素トーラス $\} / \overset{\text{同型}}{\simeq}$.

**問題 11.3** $(***)$**.** $\mathfrak{M} \subset \mathrm{Mat}(2g \times g, \mathbb{C})$ の位相を $\mathrm{Mat}(2g \times g, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{2g^2}$ の Euclid 位相の相対位相とし, $\mathfrak{T}_g$ の位相をその商位相で定める. このとき, $g \ge 2$ では $\mathfrak{T}_g$ は Hausdorff 空間でないことを, $P := \begin{pmatrix} \sqrt{-1} I_g \\ I_g \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}$ の同値類 $[P] \in \mathfrak{T}_g$ を考えることで示せ. 但し $I_g$ は $g$ 次単位行列.

## 11.2　Abel 多様体

**補題 11.2.2.** 複素多様体 $M$ 上の階数 $r$ のベクトル束 $V$ に対し, 次の手順で $M$ 上の層 $\mathfrak{F}_V$ が定まる.

(i) $\pi : V \twoheadrightarrow M$ をベクトル束から底空間への射影とする. 開集合 $U \subset V$ に対し, $f \circ s = \mathrm{id}_U$ となる複素多様体の正則写像 $s : U \to X$. のことを $\pi$ の $U$ 上の切断と呼ぶ.

(ii) $U \mapsto \{\pi$ の $U$ 上の切断 $\}$ で定まる前層 $\mathfrak{F}_V$ は層である.

また, $\mathcal{O}_M$ を $M$(に付随する複素解析空間) の構造層として, $\mathfrak{F}_V$ は階数 $r$ の局所自由 $\mathcal{O}_M$ 加群層である.

**問題 11.4** $(**)$**.** 補題 11.2.2 を証明せよ.

**問題 11.5** $(**)$**.** 複素多様体 $\mathbb{C}^g$ 上の直線束は自明なベクトル束 $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}$ しかないことを示せ.

**問題 11.6** $(*)$**.** 等式 (11.2) を示せ.

**問題 11.7** $(*)$**.** 定理 11.2.6 の証明で用いられ式 (11.3) と (11.4) を導け.

---

[*1] 2018/12/24 版, ver. 0.1.

## 11.3 偏極 Abel 多様体

**補題 11.3.1** (Frobenius の定理)**.** $\Lambda$ の基底 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}\}$ を適当に取り直して, 行列 $E = (A(\gamma_i, \gamma_j))_{i,j}$ を次の形にできる.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_g), \quad d_i \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ かつ } d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_g$$

**問題 11.8** $(**)$**.** 単因子論を用いて補題 11.3.1 を示せ.

**補題 11.3.2.** $E$ が補題 11.3.1 の標準形のとき, $\Lambda$ の基底 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}\}$ を適当に取り直して, 周期行列 $\Omega$ を

$$\Omega = \begin{pmatrix} \tau\Delta^{-1} \\ I_g \end{pmatrix}$$

の形にできる. ここで $\tau \in \mathrm{Mat}(g, \mathbb{C})$ は ${}^t\tau = \tau$ かつ $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ を満たすもの. また $I_g$ は $g$ 次単位行列.

**問題 11.9** $(**)$**.** 補題 11.3.2 の証明で用いられる $\det \Omega_2 \neq 0$ および式 (11.7) を示せ.

**定義.** 次で定まる $\mathfrak{H}_g$ を $g$ 次 **Siegel 上半空間** (Siegel upper half space) と呼ぶ.

$$\mathfrak{H}_g := \{\tau \in \mathrm{Mat}(g, \mathbb{C}) \mid {}^t\tau = \tau, \mathrm{Im}\,\tau > 0\}.$$

**定義.** 次で定まる群 $\mathrm{Sp}(\Delta, \mathbb{Z})$ を**パラモジュラー群** と呼ぶ.

$$\mathrm{Sp}(\Delta, \mathbb{Z}) := \left\{ M \in \mathrm{GL}(2g, \mathbb{Z}) \,\middle|\, M \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} {}^tM = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

特に $\mathrm{Sp}(I_g, \mathbb{Z})$ を $g$ 次**整シンプレクティック群** または **Siegel モジュラー群** と呼ぶ.

$\mathrm{Sp}(\Delta, \mathbb{Z})$ の $\mathfrak{H}_g$ への作用は次のように記述できる.

**補題.** $M \in \mathrm{Sp}(\Delta, \mathbb{Z})$ を

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{Mat}(g, \mathbb{C})$$

とブロック分解すると, $\Omega$ は $M$ の作用で

$$\Omega = \begin{pmatrix} \widetilde{\tau} \\ I_g \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \widetilde{\tau}' \\ I_g \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\tau}' = (\alpha\tau + \beta)(\gamma\tau + \delta)^{-1} \tag{11.8}$$

に写る. 従って $M$ の $\mathfrak{H}_g$ への作用は次のように書ける.

$$\mathfrak{H}_g \ni \tau \longmapsto \tau' := (\alpha\tau + \beta\Delta)(\gamma\tau + \delta\Delta)^{-1}\Delta.$$

**問題 11.10** $(*)$**.** 式 (11.8) を示せ.

# 連絡事項

レポートの締め切りは

- 修士 2 年生の方は次回 1/17 (木) の講義終了時刻
- その他の方は 1/24 (木) の講義終了時刻

とします.

**以上です.**