2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　01 月 10 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

11　複素トーラスと Abel 多様体

今回からは [上清08, 2 章] に従って Torelli の定理を扱う. その準備として, 今回は複素トーラスと Abel 多様体に関する基本事項をまとめておく.

11.1　複素トーラス

$\mathbb{C}$ 線形空間の**格子** (lattice) とは ($\mathbb{Z}$ 加群としての) 部分加群のことであった.

定義. g 次元 $\mathbb{C}$ 線形空間 V の階数 $2g$ の格子 Λ による商空間 V/Λ は g 次元コンパクト複素多様体である. これを g 次元**複素トーラス** (complex torus) と呼ぶ.

複素トーラスの同型類の記述, ないし, 2 つの複素トーラスがいつ同型かという問題を考えてみよう. g 次元 $\mathbb{C}$ 線形空間 V の基底 $e_1, \dots, e_g$ を固定する. Λ の生成元を $\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}$ として, 次のように展開する.

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{g} a_{i,j} e_j, \quad a_{i,j} \in \mathbb{C}.$$

これ以降, 複素数成分の $m \times n$ 行列の集合を $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{C})$ と書くことにする.

定義. 次の $\Omega \in \mathrm{Mat}(2g \times g, \mathbb{C})$ を複素トーラス $T = V/\Lambda$ の**周期行列** (period matrix) と呼ぶ.

$$\Omega := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,g} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,g} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2g,1} & \dots & a_{2g,g} \end{pmatrix}.$$

補題 11.1.1. $\Lambda = \sum_{i=1}^{2g} \mathbb{Z}\lambda_i$ が階数 $2g$ の V の格子であるための必要十分条件は

$$\det(\Omega, \overline{\Omega}) \neq 0.$$

問題 11.1 ($*$)**.** 補題 11.1.1 を示せ.

補題 11.1.1 の条件を満たす Ω から格子 $\Lambda \subset V$ が決まる. これから定まる複素トーラスを次のように表すことにする.

$$T_\Omega \equiv \mathbb{C}^g/\Omega = V/\Lambda.$$

命題 11.1.2. 補題 11.1.1 の条件を満たす $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathrm{Mat}(2g \times g, \mathbb{C})$ について,

$$T_{\Omega_1} \simeq T_{\Omega_2} \iff \Omega_1 = M\Omega_2 A, \quad \exists\, M \in \mathrm{GL}(2g, \mathbb{Z}),\ \exists\, A \in \mathrm{GL}(g, \mathbb{C}).$$

[*1] 2019/01/22 版, ver. 0.4.

証明. Ω_1 と Ω_2 が定める V の格子を Λ_1, Λ_2 とする. $\Lambda_1 = \Lambda_2$ となるための必要十分条件は, $\Omega_1 = M\Omega_2$ となる $M \in \mathrm{GL}(2g, \mathbb{Z})$ が存在することである.

次に, 複素多様体の正則写像 $V_1/\Lambda_1 \to V_2/\Lambda_2$ が線形写像 $f : V_1 \to V_2$ と V_2/Λ_2 の平行移動の合成で得られること (問題 11.2 参照) に注意する. 従って, $V/\Lambda_1 \simeq V/\Lambda_2$ となるための必要十分条件は, $f(\Lambda_1) = \Lambda_2$ となる線形同型 $f : V \to V$ が存在することである. V の基底 $e_1, \ldots, e_n$ を固定しているので, そのような f は $\mathrm{GL}(g, \mathbb{C})$ の元と 1 対 1 に対応する. □

問題 11.2 (∗∗)**.** 上の証明で用いた, 次の主張を証明せよ: 複素多様体の正則写像 $V_1/\Lambda_1 \to V_2/\Lambda_2$ は全て, 線形写像 $f : V_1 \to V_2$ と V_2/Λ_2 の平行移動の合成である.

系. 集合 $\mathfrak{T}_g$ を

$$\mathfrak{T}_g := \mathrm{GL}(2g, \mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{M} / \mathrm{GL}(g, \mathbb{C}), \quad \mathfrak{M} := \{\Omega \in \mathrm{Mat}(2g \times g, \mathbb{C}) \mid \det(\Omega, \overline{\Omega}) \neq 0\}$$

と定めると

$$\mathfrak{T}_g = \{g \text{ 次元複素トーラス}\} / \simeq .$$

$\mathfrak{T}_g$ は複素トーラスのモジュライ空間と呼ぶべきものだが, 次の問題で分かるように, 安直な商位相を考えると $\mathfrak{T}_g$ は多様体になり得ない.

問題 11.3 (∗∗∗)**.** $\mathfrak{M} \subset \mathrm{Mat}(2g \times g, \mathbb{C})$ の位相を $\mathrm{Mat}(2g \times g, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{2g^2}$ の Euclid 位相の相対位相とし, $\mathfrak{T}_g$ の位相をその商位相で定める. このとき, $g \geq 2$ では $\mathfrak{T}_g$ は Hausdorff 空間でないことを,

$$P := \begin{pmatrix} \sqrt{-1} I_g \\ I_g \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}$$

の同値類 $[P] \in \mathfrak{T}_g$ を考えることで示せ. 但し I_g は g 次単位行列.

11.2 Abel 多様体

定義. 複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ に複素部分多様体として埋め込むことのできる g 次元複素トーラスを, g 次元 **Abel 多様体** (abelian variety) と呼ぶ.

GAGA (定理 9.2.2 (1)) で言い換えると, Abel 多様体とは射影多様体であって付随する複素解析空間が複素トーラスであるもののことである.

この副節では, 複素トーラスが Abel 多様体であるための条件を求める. §8.1 の議論を思い出すと, 代数多様体が射影的であるならその上に豊富な可逆層が存在するから, Abel 多様体上にも豊富な可逆層がある. まずは Abel 多様体上の可逆層を考えることにしよう.

可逆層は定義から連接層なので, GAGA (定理 9.2.2 (2)) によって, 射影多様体 X 上の可逆層 $\mathcal{L}$ に対応する複素解析空間 X_h 上の解析的連接層 $\mathcal{L}_h$ がある. 実は

命題 11.2.1. X_h が複素多様体なら, $\mathcal{L}_h$ は X_h 上の直線束に付随する層である. より一般的に, X_h が複素多様体なら, X 上の局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{F}$ に対応する X_h 上の解析的連接層 $\mathcal{F}_h$ は, ベクトル束 $V \to X_h$ に付随する層である.

ここでベクトル束に付随する層とは次のようなものである.

補題 11.2.2. 複素多様体 M 上の階数 r のベクトル束 V に対し, 次の手順で M 上の層 $\mathfrak{F}_V$ が定まる.

(i) $\pi : V \twoheadrightarrow M$ をベクトル束から底空間への射影とする. 開集合 $U \subset V$ に対し, $f \circ s = \mathrm{id}_U$ となる複素多様体の正則写像 $s : U \to X$. のことを π の U 上の切断と呼ぶ.

(ii) $U \mapsto \{\pi$ の U 上の切断 $\}$ で定まる前層 $\mathfrak{F}_V$ は層である.

また, $\mathcal{O}_M$ を M(に付随する複素解析空間) の構造層として, $\mathfrak{F}_V$ は階数 r の局所自由 $\mathcal{O}_M$ 加群層である.

命題 11.2.1 は GAGA における層の対応 $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_h$ (命題 9.1.4) と補題 11.2.2 から直ちに従う.

問題 11.4 $(**)$**.** 補題 11.2.2 を証明せよ. ([H77, pp.128–129, Exercise 5.18, Chap.II, §5] に, スキームの場合のベクトル束から局所自由層を構成する方法が書いてあるので参考にせよ.)

ベクトル束と局所自由層に関する次の事実も思い出しておこう. 証明はスキームの場合の [H77, pp.128–129, Exercise 5.18, Chap.II, §5] と同様である.

命題. 補題 11.2.2 の対応 $V \mapsto \mathfrak{F}_V$ は函手的で, M 上のベクトル束の圏と局所自由 $\mathcal{O}_M$ 加群層の圏の圏同値を与える.

この命題によって, 以降ベクトル束と局所自由層を同一視することにする.

そこで, 複素トーラス $T = \mathbb{C}^g/\Omega$ 上の直線束 L について考えよう. $\mathbb{C}^g$ 上の直線束は自明なものしかない (問題 11.5 参照) から, 射影 $p : \mathbb{C}^g \to T$ による引き戻し p^*L について

$$p^*L \simeq \mathbb{C}^g \times \mathbb{C} \tag{11.1}$$

という同型が存在する. 以下この同型を 1 つ取って固定し, $p^*L = \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}$ とみる.

問題 11.5 $(**$ [小林05, 演習問題 3.4]$)$**.** 複素多様体 $\mathbb{C}^g$ 上の直線束は自明なベクトル束 $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}$ しかないことを示せ.

Ω が定める格子を $\Lambda \subset \mathbb{C}^g$ と書く. T は $\mathbb{C}^g$ 上への Λ の作用 (平行移動) による商多様体だから, L も Λ の作用による商多様体と思える. $\lambda \in \Lambda$ の作用を

$$\lambda : \mathbb{C}^g \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}, \quad (z, \zeta) \longmapsto (z + \lambda, j(\lambda, z)\zeta) \tag{11.2}$$

と書くと, $j(\lambda, -) : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ は正則関数で, $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ に対して次の関係式を満たす.

$$j(\lambda + \lambda', z) \; = \; j(\lambda', z + \lambda)\, j(\lambda, z). \tag{11.3}$$

このような関数 j を保形因子 (factor of automorphy) と呼ぶ.

問題 11.6 $(*)$**.** 等式 (11.3) を示せ.

同型 (11.1) を選び直すことは正則関数 $u : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の掛け算に対応する. よって, 同型の選び直しによって正則関数 $j(\lambda, z)$ は

$$j'(\lambda, z) \; := \; u(z + \lambda) j(\lambda, z) u(z)^{-1}$$

に写る. つまり, $j(\lambda, z)$ と $j'(\lambda, z)$ に対応する T 上の直線束は同型である.

以上の議論により, 直線束の同型類が保形因子で決定されることが分かった. しかし, 直線束を構成するには保形因子だけでは不十分であり, 直線束上の Hermite 構造とそれから定まる Chern 類を考える必要がある. ここでは結果だけを紹介しよう.

定理 11.2.3 (**Appell-Humbert の定理**). $T = \mathbb{C}^g/\Lambda$ を複素トーラスとする.

(1) T 上の直線束 L に対して, 次の性質を持つ $\mathbb{C}^g$ 上の Hermite 形式 $H(z,w)$ と写像 $\chi : \Lambda \to U(1) := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ が一意に決まる.

(A1) $A(z,w)$ を $H(z,w)$ の虚部とすると, 任意の $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ について $A(\lambda, \lambda') \in \mathbb{Z}$.

(A2) 任意の $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ について $\chi(\lambda + \lambda') = \chi(\lambda)\chi(\lambda') \exp\bigl(\sqrt{-1}\pi A(\lambda, \lambda')\bigr)$.

このような χ を**半指標** (semi-character) と呼ぶ.

(2) 上の (A1) と (A2) を満たす $H(z,w)$ と $\chi : \Lambda \to U(1)$ に対し,

$$j(\lambda, z) \ := \ \chi(\lambda) \exp\bigl(\pi H(z, \lambda) + \pi H(\lambda, \lambda)/2\bigr)$$

と定め, (11.2) によって Λ の $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}$ への作用を定義する. このとき

$$L(H, \chi) \ := \ (\mathbb{C}^g \times \mathbb{C})/\Lambda$$

は T 上の直線束であり, H と χ が (1) の対応で定まる Hermite 形式と半指標になる.

定理 11.2.3 の証明は [小林05, 定理 8.7] を参照せよ.

次に豊富な可逆層に対応する直線束の記述を説明しよう. Appell-Humbert の定理 11.2.3 を用いると, 結果は以下のように非常に具体的に書ける.

定理 11.2.4. 複素トーラス T 上の直線束 $L(H, \chi)$ が豊富であるための必要十分条件は, Hermite 形式 $H(z,w)$ が正定値であることである.

定理 11.2.4 は小平埋蔵定理から従う. 詳しくは [小林05, 定理 8.9] を参照せよ. 以上をまとめると

系 11.2.5. 複素トーラス $T = \mathbb{C}^g/\Lambda$ が Abel 多様体であるための必要十分条件は, 次の条件を満たす正定値 Hermite 形式 $H(z,w)$ が存在することである.

(A1) $A(z,w)$ を $H(z,w)$ の虚部とすると, 任意の $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ について $A(\lambda, \lambda') \in \mathbb{Z}$.

これを周期行列 Ω で言い換えると

定理 11.2.6. 複素トーラス $T = \mathbb{C}^g/\Omega$ が Abel 多様体であるための必要十分条件は, 次の 2 条件を満たす行列 E が存在することである.

(P0) $E \in \mathrm{Mat}(2g, \mathbb{Z})$, ${}^tE = -E$.

(P1) ${}^t\Omega E^{-1} \Omega = 0$.

(P2) $\sqrt{-1}\,{}^t\Omega E^{-1} \overline{\Omega} > 0$.

証明. 周期行列 Ω を $\Omega = {}^t(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$ と表すと, 行ベクトル $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$ は格子 Λ を生成する. Hermite 形式 $H(z,w)$ の虚部 $A(z,w)$ を用いて, 行列 $E = (e_{ij})_{i,j=1}^{2g}$ を

$$e_{ij} \ := \ A(\gamma_i, \gamma_j)$$

で定義する. すると

$$e_{ij} \ = \ \frac{1}{2\sqrt{-1}}\bigl(H(\gamma_i, \gamma_j) - \overline{H(\gamma_i, \gamma_j)}\bigr) \ = \ \frac{1}{2\sqrt{-1}}\bigl(H(\gamma_i, \gamma_j) - H(\gamma_j, \gamma_i)\bigr)$$

となるので, 特に ${}^tE = -E$ である. また系 11.2.5 より $e_{ij} \in \mathbb{Z}$. ここで E の定義を行列の積で書き直せば

$$E = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \begin{pmatrix} \Omega & \overline{\Omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & -{}^tH \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\overline{\Omega} \\ {}^t\Omega \end{pmatrix}. \tag{11.4}$$

これを, 補題 11.1.1 に注意して変形すると

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \begin{pmatrix} {}^t\overline{\Omega} \\ {}^t\Omega \end{pmatrix} E^{-1} \begin{pmatrix} \Omega & \overline{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^{-1} & 0 \\ 0 & -{}^tH^{-1} \end{pmatrix}. \tag{11.5}$$

特に

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} {}^t\overline{\Omega} E^{-1} \Omega = H^{-1}, \quad {}^t\Omega E^{-1} \Omega = 0. \tag{11.6}$$

H が正定値 $\iff$ ${}^tH^{-1}$ が正定値に注意して, (A1) $\iff$ (P0) – (P2) が得られる. □

問題 11.7 (∗)**.** 式 (11.4) と (11.5) を導け.

注意. 条件 (P1) と (P2) は閉 Riemann 面の周期行列の満たすべき条件として Riemann によって発見されたので, **Riemann の条件**と呼ばれている.

11.3 偏極 Abel 多様体

複素トーラス $T = \mathbb{C}^g/\Omega$ の周期行列 Ω が生成する格子を Λ と書く. また定理 11.2.6 とその証明の記号 E, H, A を引き続き使う.

補題 11.3.1 (Frobenius の定理)**.** Λ の基底 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}\}$ を適当に取り直して, 行列 $E = (A(\gamma_i, \gamma_j))_{i,j}$ を次の形にできる.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_g), \quad d_i \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ かつ } d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_g$$

問題 11.8 (∗∗)**.** 単因子論を用いて補題 11.3.1 を示せ.

定義. 補題 11.3.1 の形の E の標準形を与える Λ の基底 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}\}$ を**シンプレクティック基底** (symplectic basis) と呼ぶ.

補題 11.3.2. E が補題 11.3.1 の標準形のとき, Λ の基底 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}\}$ を適当に取り直して, 周期行列 Ω を

$$\Omega = \begin{pmatrix} \tau\Delta^{-1} \\ I_g \end{pmatrix}$$

の形にできる. ここで $\tau \in \mathrm{Mat}(g, \mathbb{C})$ は ${}^t\tau = \tau$ かつ $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ を満たすもの. また I_g は g 次単位行列.

証明. $\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}$ として条件 (P1) と (P2) を書き直すと

$${}^t\Omega_2\Delta^{-1}\Omega_1 - {}^t\Omega_1\Delta^{-1}\Omega_2 = 0, \quad \sqrt{-1}\big({}^t\Omega_2\Delta^{-1}\overline{\Omega}_1 - {}^t\Omega_1\Delta^{-1}\overline{\Omega}_2\big) > 0$$

となる. これから $\det\Omega_2 \neq 0$ が示せる. そこで Ω の右から Ω_2^{-1} をかけて, Ω を $\begin{pmatrix} \widetilde{\tau} \\ I_g \end{pmatrix}$ の形にできる. このとき, 式 (11.6) と補題 11.3.1 から

$$\widetilde{\tau}\Delta - \Delta{}^t\widetilde{\tau} = 0, \quad \sqrt{-1}\big(\overline{\widetilde{\tau}}\Delta - \Delta{}^t\widetilde{\tau}\big) > 0 \tag{11.7}$$

となる．$\tau := \widetilde{\tau}\Delta$ とすれば結論を得る． □

問題 11.9 (∗∗)**.** 上の証明中の $\det \Omega_2 \neq 0$ および式 (11.7) を示せ．

定義. 次で定まる $\mathfrak{H}_g$ を g 次 **Siegel 上半空間** (Siegel upper half space) と呼ぶ．

$$\mathfrak{H}_g := \{\tau \in \mathrm{Mat}(g, \mathbb{C}) \mid {}^t\tau = \tau, \operatorname{Im}\tau > 0\}.$$

$g = 1$ の場合, $\mathfrak{H}_1$ は上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ に他ならない．

E を保つような Ω の基底の取り換えは, $ME^tM = E$ となる $M \in \mathrm{GL}(2g, \mathbb{Z})$ で記述される．そこで

定義. 次で定まる群 $\mathrm{Sp}(\Delta, \mathbb{Z})$ を**パラモジュラー群** (paramodular group) と呼ぶ．

$$\mathrm{Sp}(\Delta, \mathbb{Z}) := \left\{ M \in \mathrm{GL}(2g, \mathbb{Z}) \,\middle|\, M \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} {}^tM = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

特に $\mathrm{Sp}(I_g, \mathbb{Z})$ を g 次**整シンプレクティック群** (integral symplectic group) または **Siegel モジュラー群** (Siegel modular group) と呼ぶ．

$\mathrm{Sp}(\Delta, \mathbb{Z})$ の $\mathfrak{H}_g$ への作用は次のように記述できる．

補題. $M \in \mathrm{Sp}(\Delta, \mathbb{Z})$ を

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{Mat}(g, \mathbb{C})$$

とブロック分解すると, Ω は M の作用で

$$\Omega = \begin{pmatrix} \widetilde{\tau} \\ I_g \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \widetilde{\tau}' \\ I_g \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\tau}' = (\alpha\tau + \beta)(\gamma\tau + \delta)^{-1} \tag{11.8}$$

に写る．従って M の $\mathfrak{H}_g$ への作用は次のように書ける．

$$\mathfrak{H}_g \ni \tau \longmapsto \tau' := (\alpha\tau + \beta\Delta)(\gamma\tau + \delta\Delta)^{-1}\Delta.$$

問題 11.10 (∗)**.** 式 (11.8) を示せ．

そこで商空間 $\mathrm{Sp}(\Delta, \mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g$ をアーベル多様体のモジュライ空間と思うのが自然である．正確には次の概念を必要とする．

定義. T を Abel 多様体とする．

(1) T と T 上の豊富な直線束 L の組 (T, L) の同値類を**偏極 Abel 多様体** (polarized abelian variety) という．

(2) 2 つの偏極 Abel 多様体 (T, L_1) と (T, L_2) は, ある $a \in T$ があって $t_a^* L_1 \simeq L_2$ となるとき, 同型であるといい, $(T, L_1) \simeq (T, L_2)$ と書く．ここで $t_a : T \to T$ は平行移動 $t \mapsto t + a$ が定める T の自己同型．

定理 11.2.3 より, Abel 多様体 $T = \mathbb{C}^g/\Omega$ 上の豊富な直線束 L_1, L_2 は $L_i = L(H_i, \chi_i)$ と表せる．$(T, L_1) \simeq (T, L_2)$ となるための条件を考えよう．(この講義ノートでは述べていないが) Hermite 形式 H_i の構成の仕方からつぎの主張が従う．

補題.

$$L(H_1, \chi_1) \simeq t_a^* L(H_2, \chi_2) \iff H_1 = H_2.$$

更に $\Omega = \begin{pmatrix} \tau \\ \Delta \end{pmatrix}$, $\tau \in \mathfrak{H}_g$ とすると, (11.6) より Hermite 形式は

$$H^{-1} = \Delta^{-1}(\operatorname{Im}\tau)\Delta^{-1}$$

で定まる. そこで

定義. 偏極 Abel 多様体 (T, L) は, $L = L(H, \chi)$ と書いた時の Hermite 形式が

$$\Delta = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_g), \quad d_i \in \mathbb{Z}_{>0},\ d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_g$$

で定まるとき, Δ **型の偏極構造**を持つ, または $(d_1, d_2, \dots, d_g)$ **型の偏極構造**を持つと呼ぶ. そしてこのときの T を Δ **偏極 Abel 多様体**, または $(d_1, d_2, \dots, d_g)$ **型の偏極 Abel 多様体**と呼ぶ.

定理 11.3.3. 商空間 $\mathrm{Sp}(\Delta, \mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}_g$ は Δ 型偏極 Abel 多様体の同型類と 1 対 1 に対応する.

証明は [上清08, 定理 2.9, 2.10] を参照せよ.

次回の準備をして終わることにする.

定義 11.3.4. $(1, 1, \dots, 1)$ 型の偏極 Abel 多様体のことを**主偏極 Abel 多様体** (principally polarized abelian variety) という.

参考文献

[H77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer, 1977;
高橋宣能, 松下大介訳, **代数幾何学 1,2,3**, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2008.

[小林05] 小林昭七, **複素幾何**, 岩波書店, 2005.

[上清08] 上野健爾, 清水勇二, **複素構造の変形と周期**, 岩波書店, 2008.

以上です.