2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　12 月 20 日分レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

10　三位一体

10.1　主張

定理 10.1.1. 次の 3 つの圏は同値である.

(i) **非特異射影曲線**の圏 $(\mathcal{C}urve)$. 対象は $\mathbb{C}$ 上の非特異完備代数曲線 C. 射は $\mathbb{C}$ 上のスキームの射 $C \to C'$.
(ii) **閉 Riemann 面**の圏 $(\mathcal{R}iemann)$. 対象はコンパクト 1 次元複素多様体 R. 射は複素多様体の正則写像 $R \to R'$.
(iii) **1 変数代数函数体**の圏 $(\mathcal{F}uction)$. 対象は 1 変数有理函数体 $\mathbb{C}(x)$ の有限次元拡大体 K. 射は $\mathbb{C}$ 代数としての準同型 $K \to K'$.

命題 10.1.2. $\mathbb{C}$ 上有限型スキーム X に付随する複素解析空間 X_h を対応させる函手 $X \mapsto X_h$ が定理 10.1.1 の圏同値 $(\mathcal{C}urve) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{R}iemann)$ を与える.

命題 10.1.3. $\mathbb{C}$ 上の整スキーム X にその有理函数体 $K(X)$ を対応させる函手 $X \mapsto K(X)$ が定理 10.1.1 の圏同値 $(\mathcal{C}urve) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}uction)$ を与える.

命題 10.1.3 の証明は [H77, Chap.I, §6] を参照[*2]せよ.

命題 10.1.4. Riemann 面 R にその有理型函数体を対応させる函手が圏同値 $(\mathcal{R}iemann) \to (\mathcal{F}uction)$ を与える.

命題 10.1.4 の証明は [今15, 第 4 章] を参照せよ.

命題 10.1.5. 1 変数代数函数体 K にその素点の集合を対応させる函手が圏同値 $(\mathcal{F}uction) \to (\mathcal{R}iemann)$ を与える.

命題 10.1.5 の証明も [今15, 第 4 章] を参照せよ.

問題 10.1 $(\ast\ast\ast\ast)$**.** 命題 10.1.3, 10.1.4, 10.1.5 の証明を解説せよ.

10.2　種数が小さい場合の三位一体

命題 10.2.1. 種数 $g = 1$ の場合の三位一体は

$$C = \text{楕円曲線}, \quad R = 1\,\text{次元複素トーラス}, \quad K = \mathbb{C}(x, \sqrt{f(x)}),\ f\ \text{は重根を持たない 3 次多項式}.$$

---

*1 2018/12/13 版, ver. 0.1.

*2 正確には, [H77, Chap.I, §6] で扱っている圏同値はスキームとしての曲線の圏 $(\mathcal{C}urve)$ からの函手ではなく, $(\mathcal{C}urve)$ と同値な ([H77, Chap.I] の意味での) 代数多様体としての曲線の圏から函手です.

証明. まず Riemann 面 R から始めると, 1 次元複素トーラスは

$$R = \mathbb{C}/L, \quad L = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}, \quad \operatorname{Im}\omega > 0$$

と書ける. ここで **Weierstrass の $\wp$ 関数**

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{p \in L \setminus \{0\}} \Big(\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{a^2} \Big)$$

を思い出して, 写像

$$\mathbb{C}/L \longrightarrow \mathbb{CP}^2, \quad z \longmapsto \begin{cases} [1 : \wp(z) : \wp'(z)] & z \notin L \\ [0 : 0 : 1] & z \in L \end{cases}$$

とする. すると, $\wp$ 関数が微分方程式

$$\big(\wp'(z)\big)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3, \quad g_2 := 60 \sum_{p \in L\setminus\{0\}} p^{-4}, \ g_3 := 140 \sum_{p \in L\setminus\{0\}} p^{-6} \tag{10.1}$$

を満たすことから, 上の写像 $\mathbb{C}/L \to \mathbb{CP}^2$ の像は 3 次斉次式

$$F(X, Y, Z) := XZ^2 - 4Y^3 - g_2X^2Y - g_3X^3$$

の零点 $\{[X : Y : Z] \in \mathbb{P}^2 \mid F(X, Y, Z) = 0\}$, つまり F が定める平面曲線で与えられることがわかる. C はこの平面曲線に対応した非特異完備代数曲線である.

また, R の有理型函数体 K は $\wp$ と $\wp'$ で生成されるが, (10.1) より $\wp' = \sqrt{f(\wp)}$, $f(x) := 4x^3 - g_2x - g_3$ なので, $K = \mathbb{C}(x, \sqrt{f(x)})$ と書ける. 更に $f(x)$ は重根を持たない. 以上で $g = 1$ の場合の三位一体が確認できた. □

問題 10.2 (∗∗)**.** Weierstrass の $\wp$ 函数の微分方程式 (10.1) を導け. また $f(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$ が重根を持たないことを示せ.

連絡事項

レポートの締め切りは

- 修士 2 年生の方は来年の 1/17 (木) の講義終了時刻
- その他の方は 1/24 (木) の講義終了時刻

とします.

参考文献

[H77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer, 1977;
高橋宣能, 松下大介訳, **代数幾何学 1,2,3**, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2008.

[小05] 小林昭七, **複素幾何**, 岩波書店, 2005.

[今15] 今野一宏, **リーマン面と代数曲線**, 共立講座 数学の輝き 2, 共立出版, 2015.

以上です.