2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　12 月 13 日分レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

9 GAGA

9.1 スキームに対応した複素解析空間

命題 9.1.1. $\mathbb{C}$ 上の有限型スキーム X に対し, 以下の手順で複素解析空間 X_h が構成できる. 更にこの構成 $X \mapsto X_h$ は函手的である.

(i) アフィン開被覆 $X = \cup_{i \in I} Y_i$, $Y_i = \operatorname{Spec} A_i$ であって $A_i = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r)$ となるものが取れる. 但し $f_i(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

(ii) 各 $f_i(x)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の正則関数だから, $(Y_i)_h := \{z \in \mathbb{C}^n \mid f_1(z) = \cdots = f_r(z) = 0\}$ とその上の正則関数層 $\mathcal{O}$ から局所環付き空間 $((Y_i)_h, \mathcal{O})$ が定義できる.

(iii) $X = \cup_{i \in I} Y_i$ の張り合わせデータを用いて $((Y_i)_h, \mathcal{O})$ を張り合わせて $X_h = \cup_{i \in I} (Y_i)_h$ を得る.

問題 9.1 (∗). 対応 $X \to X_h$ が函手的であることを確認せよ.

補題 9.1.2. X を $\mathbb{C}$ 上有限型なスキーム X とする. 局所環付き空間の射 $\varphi\colon X_h \to X$ であって, 底空間の像が X の閉点の集合になるものが存在する.

命題 9.1.5. X を $\mathbb{C}$ 上有限型なスキームとし, X_h を X に付随する複素解析空間とする. また $\mathcal{F}$ を X 上の連接層とし, $\mathcal{F}_h$ を付随する X_h 上の解析的連接層とする. このとき, 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{C}$ 線形空間の準同型

$$\alpha_i : H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X_h, \mathcal{F}_h)$$

が以下の手順で構成できる. 更にこの準同型 α_i は函手的である.

(i) $\mathcal{F}_h$ の構成法から, 補題 9.1.2 の射 φ によって $\mathcal{F}_h \xrightarrow{\sim} \varphi^* \mathcal{F}$ となる.

(ii) $\alpha_i := H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X_h, \varphi^* \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^i(X_h, \mathcal{F}_h)$ とする. 但し最初の写像は φ^* が誘導するもの.

9.2 GAGA

命題 9.2.1. (1) 函手 $X \mapsto X_h$ は本質的全射 (essentially surjective) ではない. 即ち, ある複素解析空間 $\mathfrak{X}$ であって, 任意の $\mathbb{C}$ 上有理型スキーム X に対し $\mathfrak{X} \not\simeq X_h$ となるものがある.

(2) 函手 $X \mapsto X_h$ は忠実 (faithful) ではない. 即ち, $\mathbb{C}$ 上有理型スキーム X, X' であって, $X \not\simeq X'$ かつ $X_h \simeq X'_h$ となるものが存在する.

(3) 函手 $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_h$ は本質的全射ではない. 即ち, $\mathbb{C}$ 上有理型スキーム X と X_h 上の解析的連接層 $\mathfrak{F}$ であって, 任意の X 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{F}_h \simeq \mathfrak{F}$ となるものが存在する.

(4) 函手 $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_h$ は忠実ではない. 即ち, $\mathbb{C}$ 上有理型スキーム X の上の連接層 $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ であって, $\mathcal{F} \not\simeq \mathcal{F}'$ かつ $\mathcal{F}_h \simeq \mathcal{F}'_h$ となるものが存在する.

[*1] 2018/12/09 版, ver. 0.1.

(5) 命題 9.1.5 の α_i が同型でない場合がある.

問題 9.2 ($***$)**.** [H77, §B.2] を参考にして, 具体例を挙げることで命題 9.2.1 を示せ.

定理 9.2.2 (Serre の GAGA)**.** X を $\mathbb{C}$ 上の射影スキームとし, X_h を X に付随する複素解析空間とする.

(1) 函手 $X \mapsto X_h$ は忠実充満 (fully faithful), つまり $\mathrm{Hom}_{(\mathcal{S}ch/\mathbb{C})}(X, X') = \mathrm{Hom}_{(\mathcal{A}n)}(X_h, X'_h)$. 更にこの函手は射影スキームの圏とコンパクトな複素解析空間の圏への圏同値を与える.

(2) 函手 $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_h$ は本質的全射かつ忠実充満. つまり X 上の連接層の圏から X_h 上の解析的連接層の圏への圏同値を与える.

(3) 命題 9.1.5 の α_i は全て同型.

証明は [S55, §7; §12, Théorème 1] を参照せよ.

9.3 指数完全列

問題 9.3 ($*$ [H77, pp.223–224, Exercises 4.4, 4.5, Chap.III §4])**.** 任意の環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ に対して $\operatorname{Pic} X \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ となることを示せ.

連絡事項

レポートの締め切りは

- 修士 2 年生の方は来年の 1/17 (木) の講義終了時刻
- その他の方は 1/24 (木) の講義終了時刻

とします.

参考文献

[H77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer, 1977;
高橋宣能, 松下大介訳, **代数幾何学 1,2,3**, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2008.

[S55] J.-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **6** (1955–1956), 1–42.

以上です.