2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV 12 月 13 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

9 GAGA

この節では [H77, Appendix B] に従って, $\mathbb{C}$ 上の代数幾何と複素 (解析) 幾何との対応についてまとめておく. この対応は Serre の論文 [S55] にちなんで **GAGA** と呼ばれる.

9.1 スキームに対応した複素解析空間

定義. (1) **複素解析空間** (complex analytic space)[*2] とは局所環付き空間 $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ であって, 次のような開被覆 $\mathfrak{X} = \cup_{i \in I} \mathfrak{U}_i$ をもつものである: 各 $i \in I$ について, $(\mathfrak{U}_i, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}|_{\mathfrak{U}_i})$ は以下の形の局所環付き空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ と同型.

- 多重円盤 $D := \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_i| < 1 \ (i = 1, \ldots, n)\}$ 上の正則関数 $f_1, \ldots, f_r$ があって, $Y = \{z \in D \mid f_1(z) = \cdots = f_r(z) = 0\}$. Y の位相は $\mathbb{C}^n$ の Euclid 位相の相対位相とする.
- $\mathcal{O}_D$ を D 上の正則関数層として, $\mathcal{O}_Y := \mathcal{O}_D/(f_1, \ldots, f_r)$.

スキームと同様に, $\mathfrak{X}$ を**底空間**, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ を**構造層**と呼ぶ.

(2) 複素解析空間の射は局所環付き空間の射として定義する.

複素解析空間は被約とは限らない, つまり構造層が被約とは限らないことに注意する.

スキームの場合と同様に, 複素解析空間を $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ と略記することにする.

命題 9.1.1. $\mathbb{C}$ 上の有限型スキーム X に対し, 以下の手順で複素解析空間 X_h が構成できる. 更にこの構成 $X \mapsto X_h$ は函手的である.

(i) アフィン開被覆 $X = \cup_{i \in I} Y_i$, $Y_i = \operatorname{Spec} A_i$ であって $A_i = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r)$ となるものが取れる. 但し $f_i(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

(ii) 各 $f_i(x)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の正則関数だから, $(Y_i)_h := \{z \in \mathbb{C}^n \mid f_1(z) = \cdots = f_r(z) = 0\}$ とその上の正則関数層 $\mathcal{O}$ から局所環付き空間 $((Y_i)_h, \mathcal{O})$ が定義できる.

(iii) $X = \cup_{i \in I} Y_i$ の張り合わせデータを用いて $((Y_i)_h, \mathcal{O})$ を張り合わせて $X_h = \cup_{i \in I} (Y_i)_h$ を得る.

問題 9.1 $(*)$**.** $X \to X_h$ が函手的であることを確認せよ.

定義. 命題 9.1.1 の複素解析空間 X_h を X に**付随する複素解析空間**とよぶ.

注意. X 上の Zariski 位相と区別するために, X_h 上の位相を古典位相[*3]と呼ぶことにする.

[*1] 2018/12/12 版, ver. 0.2.

[*2] 定義は様々あるのですが, ここでは最も一般的なものを扱います. 特に, $\mathfrak{X}$ に Hausdorff 性を課すことが多いのですが, ここでは課しません.

[*3] 呼び方は色々あって, usual topology とか analytic topology と言ったりもします.

補題 9.1.2. X を $\mathbb{C}$ 上有限型なスキーム X とする. 局所環付き空間の射 $\varphi : X_h \to X$ であって, 底空間の像が X の閉点の集合になるものが存在する.

証明. 命題 9.1.1 の記号を用いる. 恒等写像 $(Y_i)_h \to Y_i$ を張り合わせて連続写像 $\varphi : X_h \to X$ を得る. また恒等写像 $A_i \to \mathcal{O}((Y_i)_h)$ は局所化と可換な環準同型だから, これらを張り合わせて環層の射 $\varphi^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{X_h}$ を得る. □

定理 9.1.3. X を $\mathbb{C}$ 上有限型なスキームとし, X_h を X に付随する複素解析空間とする.

(1) X は $\mathbb{C}$ 上分離的 $\iff$ X_h は Hausdorff.

(2) X は被約 $\iff$ X_h は被約.

(3) X は非特異 $\iff$ X_h は複素多様体.

(4) X は $\mathbb{C}$ 上固有 $\iff$ X_h はコンパクト.

証明は [S55, §§7–8] を参照せよ.

函手 $X \mapsto X_h$ の構成と同様に, X 上の連接層から X_h 上の連接層を構成することができる.

定義. 複素解析空間 $(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ 上の**解析的連接層** (coherent analytic sheaf) とは, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ 加群層 $\mathfrak{F}$ であって, 適当な開被覆 $X = \cup \mathfrak{U}$ があって各 $\mathfrak{U}$ 上で

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{U}}^{\oplus m} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{U}}^{\oplus n} \longrightarrow \mathfrak{F}|_{\mathfrak{U}} \longrightarrow 0$$

という $\mathcal{O}_{\mathfrak{U}}$ 加群層の完全列が存在するもののことである.

命題 9.1.4. X を $\mathbb{C}$ 上有限型なスキームとし, X_h を X に付随する複素解析空間とする. X 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対し, 以下の手順で X_h 上の解析的連接層 $\mathcal{F}_h$ が構成できる. 更にこの構成 $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_h$ は函手的である.

(i) 開被覆 $X = \cup U$ であって, 各 U 上で $\mathcal{O}_U$ 加群層の完全列

$$\mathcal{O}_U^{\oplus m} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_U^{\oplus n} \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

が成立するようなものが取れる.

(ii) 古典位相は Zariski 位相より細かいので, 各 U について, 付随する $U_h \subset X_h$ が開集合であることに注意する. また φ は $\mathcal{O}_U$ の局所切断の $m \times n$ 行列 $(s_{i,j})$ で与えられている. 従って, 各 $s_{i,j}$ は $\mathcal{O}_{U_h}$ の局所切断と思えて, それらは $\mathcal{O}_{U_h}$ 加群の射 $\varphi_h : \mathcal{O}_{U_h}^{\oplus m} \to \mathcal{O}_{U_h}^{\oplus n}$ を定義する.

(iii) そこで

$$\mathcal{F}_h|_{U_h} := \operatorname{Coker}(\varphi_h : \mathcal{O}_{U_h}^{\oplus m} \to \mathcal{O}_{U_h}^{\oplus n})$$

と定義すると, $\mathcal{F}_h|_{U_h}$ は張り合って $\mathcal{O}_{X_h}$ 加群層 $\mathcal{F}_h$ を与える.

命題 9.1.5. X を $\mathbb{C}$ 上有限型なスキームとし, X_h を X に付随する複素解析空間とする. また $\mathcal{F}$ を X 上の連接層とし, $\mathcal{F}_h$ を付随する X_h 上の解析的連接層とする. このとき, 各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{C}$ 線形空間の準同型

$$\alpha_i : H^i(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i(X_h, \mathcal{F}_h)$$

が以下の手順で構成できる. 更にこの準同型 α_i は函手的である.

(i) $\mathcal{F}_h$ の構成法から, 補題 9.1.2 の射 φ によって $\mathcal{F}_h \xrightarrow{\sim} \varphi^*\mathcal{F}$ となる.

(ii) $\alpha_i := H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X_h, \varphi^*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^i(X_h, \mathcal{F}_h)$ とする. 但し最初の写像は φ^* が誘導するもの.

これらの命題の証明は殆ど明らかなので省略する.

9.2 GAGA

次の命題が示すように, 前副節の函手 $X \mapsto X_h$, $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_h$ は, そのままではあまり良く振る舞わない.

命題 9.2.1. (1) 函手 $X \mapsto X_h$ は本質的全射 (essentially surjective) ではない. 即ち, ある複素解析空間 $\mathfrak{X}$ であって, 任意の $\mathbb{C}$ 上有理型スキーム X に対し $\mathfrak{X} \not\simeq X_h$ となるものがある.

(2) 函手 $X \mapsto X_h$ は忠実 (faithful) ではない. 即ち, $\mathbb{C}$ 上有理型スキーム X, X' であって, $X \not\simeq X'$ かつ $X_h \simeq X'_h$ となるものが存在する.

(3) 函手 $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_h$ は本質的全射ではない. 即ち, $\mathbb{C}$ 上有理型スキーム X と X_h 上の解析的連接層 $\mathfrak{F}$ であって, 任意の X 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{F}_h \not\simeq \mathfrak{F}$ となるものが存在する.

(4) 函手 $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_h$ は忠実ではない. 即ち, $\mathbb{C}$ 上有理型スキーム X の上の連接層 $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ であって, $\mathcal{F} \not\simeq \mathcal{F}'$ かつ $\mathcal{F}_h \simeq \mathcal{F}'_h$ となるものが存在する.

(5) 命題 9.1.5 の α_i が同型でない場合がある.

問題 9.2 (∗∗∗)**.** [H77, §B.2] を参考にして, 具体例を挙げることで命題 9.2.1 を示せ.

しかし, これらの函手は射影的なスキームに制限することで振る舞いが良くなる. 複素解析空間の圏を $(\mathcal{A}n)$ と書こう.

定理 9.2.2 (Serre の GAGA)**.** X を $\mathbb{C}$ 上の射影スキームとし, X_h を X に付随する複素解析空間とする.

(1) 函手 $X \mapsto X_h$ は忠実充満 (fully faithful), つまり $\mathrm{Hom}_{(\mathcal{S}ch/\mathbb{C})}(X, X') = \mathrm{Hom}_{(\mathcal{A}n)}(X_h, X'_h)$. 更にこの函手は射影スキームの圏とコンパクトな複素解析空間の圏への圏同値を与える.

(2) 函手 $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_h$ は本質的全射かつ忠実充満. つまり X 上の連接層の圏から X_h 上の解析的連接層の圏への圏同値を与える.

(3) 命題 9.1.5 の α_i は全て同型.

証明は [S55, §7; §12, Théorème 1] を参照せよ.

9.3 指数完全列

最後に, 指数完全列と呼ばれる解析的にしか扱えない層の完全列を紹介し, その応用として Picard 多様体の定義を行う.

指数写像 $e(x) := \exp(2\pi i x)$ によって可換群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{e} \mathbb{C}^* \longrightarrow 0$$

が得られることに注意する. 但し $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は複素数の積によって可換群とみなしている.

定義 9.3.1. $\mathfrak{X}$ を被約な複素解析空間とする. $\mathfrak{X}$ 上の加群層の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{e} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^* \longrightarrow 0$$

を**指数完全列** (exponential sequence) と呼ぶ. 但し $\mathbb{Z}$ は $\mathfrak{X}$ 上の定数層であり, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^*$ は $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ の可逆元のなす部分層である.

命題 9.3.2. X を $\mathbb{C}$ 上の射影多様体とすると, 次の長完全列がある.

$$0 \longrightarrow H^1(X_h, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \operatorname{Pic} X \longrightarrow H^2(X_h, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \cdots .$$

証明. X_h 上の指数完全列を考え, そのコホモロジー長完全列をとることで

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X_h, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^0(X_h, \mathcal{O}_{X_h}) & \longrightarrow & H^0(X_h, \mathcal{O}_{X_h}^*) & & \\ & \longrightarrow & H^1(X_h, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(X_h, \mathcal{O}_{X_h}) & \longrightarrow & H^1(X_h, \mathcal{O}_{X_h}^*) & & \\ & \longrightarrow & H^2(X_h, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(X_h, \mathcal{O}_{X_h}) & \longrightarrow & H^2(X_h, \mathcal{O}_{X_h}^*) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

を得る. X_h はコンパクトなので, X_h 上定義されている正則関数は定数に限ることに注意すると, H^0 の部分はもとの $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \to 0$ と一致する. よって $0 \to H^1(X_h, \mathbb{Z}) \to \cdots$ という完全列が得られる.

ここで定理 9.2.2 (3) より $H^i(X_h, \mathcal{O}_{X_h}) \simeq H^i(X, \mathcal{O}_X)$. また次の問題 9.3 より $H^1(X_h, \mathcal{O}_{X_h}) \simeq \operatorname{Pic} X_h$. 再び定理 9.2.2 (3) より $\operatorname{Pic} X_h \simeq \operatorname{Pic} X$ だから, 結論を得る. □

問題 9.3 ($***$ [H77, pp.223–224, Exercises 4.4, 4.5, Chap.III, §4])**.** 任意の環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ に対して $\operatorname{Pic} X \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ となることを示せ.

定理 9.3.3. $\mathbb{C}$ 上の射影多様体 X に対し, 可換群

$$\operatorname{Pic}^0 X \;:=\; H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X_h, \mathbb{Z})$$

は複素トーラスの構造を持つ. これを X の Picard 多様体と呼ぶ.

注意. 複素解析幾何を用いず, 純代数幾何的に Picard 多様体を定義することもできる. その場合は, Cartier 因子の代数同値 (algebraic equivalence) $D \overset{alg}{\sim} D'$ を導入して,

$$\operatorname{Pic}^0 X \;:=\; \{D : X \text{ の Cartier 因子} \mid D \overset{alg}{\sim} 0\}$$

と定義する.

参考文献

[H77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer, 1977;
高橋宣能, 松下大介訳, **代数幾何学 1,2,3**, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2008.

[S55] J.-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **6** (1955–1956), 1–42.

以上です.