

2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV 11 月 22 日分レポート問題*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp

https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

8 線形系

8.2 線形系

問題 8.1 (*). $X = \mathbb{P}_k^n$, $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. X 上の次数 d の有効因子全体の集合は, ある因子 D の完備線形系 $|D|$ であり, その線形系としての次元は $\binom{n+d}{n} - 1$ であることを示せ.

問題 8.2 (**). X を代数閉体 k 上の非特異射影多様体とする. D を X 上の因子とする. D が非常に豊富だと仮定する. 対応する埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}_k^m$ に関する斉次座標環 $S(X)$ の Hilbert 多項式 [H77, Chap.I §7] を $P_X(n)$ と書く. このとき, 十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対し $\dim |nD| = P_X(n) - 1$ となることをしめせ.

8.4 楕円曲線

C を代数閉体 k 上の非特異完備代数曲線とし, $K := K_C$, $g := g(C)$, $l(D) := \dim_k H^0(C, \mathcal{O}(D))$ とする.

定義. $g = 1$ となる C を楕円曲線 (elliptic curve) と呼ぶ.

Riemann-Roch の定理の応用として, Weierstrass の標準形を取り上げよう.

C を楕円曲線とし, $P \in C$ を閉点とする. Riemann-Roch の定理を繰り返し使って

$$l(P) = 1, l(2P) = 2, \dots, l(6P) = 6$$

となる. そこで

$$\varphi \in \Gamma(C, \mathcal{O}(2P)) \setminus k, \quad \psi \in \Gamma(C, \mathcal{O}(3P)) \setminus \Gamma(C, \mathcal{O}(2P))$$

が取れる. そしてこれらから

$$1, \varphi, \psi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi\psi, \psi^2 \in \Gamma(C, \mathcal{O}(6P))$$

と 7 つの元が得られる. $l(6P) = 6$ だったから, 1 次関係式

$$a_0 + a_1\varphi + a_2\psi + a_3\varphi^2 + a_4\varphi^3 + a_5\varphi\psi + a_6\psi^2 = 0$$

ができる. ここで $a_6 \neq 0$ に注意する. 実際, $a_6 = 0$ だと $\text{ord}_P \varphi^3 = -6$ と他の元の $\text{ord}_P < -6$ に矛盾する. そこで $a_6 = 1$ として, 上の関係式は $\psi^2 + (a_2 + a_5\varphi)\psi + \dots = (\psi + (a_2 + a_5\varphi)/2)^2 + \dots$ と変形できる. そこで $\psi + (a_2 + a_5\varphi)/2$ を ψ と置きなおして, 更に φ に 1 次変換を施すと, 上の関係式は

$$\psi^2 = 4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3, \quad g_2, g_3 \in k \tag{8.1}$$

となる.

*1 2018/11/20 版, ver. 0.1.

定義 8.4.2. (8.1) を楕円曲線の **Weierstrass** の標準形という.

問題 8.3 (*). (8.1) の導出の詳細を埋めよ.

参考文献

- [H77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer, 1977;
高橋宣能, 松下大介訳, 代数幾何学 **1,2,3**, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2008.

連絡事項

- 来週 (11/29 木) は月曜授業予備日のため, この講義は休講です。また再来週 (12/06) は柳田の出張のため休講です。次回は **12/13** になります。
- レポートの締め切りは, 修士 2 年生の方は来年の 1/17(木) の講義終了時刻, その他の方は 1/24(木) の講義終了時刻です。

以上です。