2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　11 月 22 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

8　線形系

この節では豊富な直線束と線形系を復習し, 特に曲線の線形系についての初歩的な議論を行う.

8.1　射影空間への埋め込み

次数付き環 S とその射影空間 $X = \operatorname{Proj} S$ を思い出そう (§§4.1–4.2). まず X 上の層 $\mathcal{O}_X(1)$ の復習をする.

補題. M を次数付き環 S 上の次数付き加群とする. $X = \operatorname{Proj} S$ 上の加群層 $\widetilde{M}$ が以下で定まる.

(i) 各 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$ に対し, $T := \{s \in S \mid 斉次元,\ s \notin \mathfrak{p}\}$ は積閉集合で, それによる M の局所化 $T^{-1}M$ は次数付き加群である. そこで $M_{(\mathfrak{p})}$ を次で定める.

$$M_{(\mathfrak{p})} := (T^{-1}M)_0 = \{m \in T^{-1}M \mid \deg m = 0\}.$$

(ii) 各開集合 $U \subset \operatorname{Proj} S$ に対し $\widetilde{M}(U)$ を次で定める.

$$\widetilde{M}(U) := \left\{ s : U \to \coprod_{\mathfrak{p} \in U} M_{(\mathfrak{p})} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \mathfrak{p} \in U,\ \exists V \subset U : 開かつ\ \mathfrak{p} \in V, \\ \exists m \in M,\ \exists f \in S : 斉次元で\ m\ と\ f\ は同じ次数, \\ \forall \mathfrak{q} \in V,\ f \notin \mathfrak{q}\ かつ\ s(\mathfrak{q}) = m/f \in M_{(\mathfrak{q})} \end{array} \right\}$$

補題. S を次数付き環とし, $X = \operatorname{Proj} S$ とする. M を S 上の次数付き加群とする.

(1) X 上の加群層 $\widetilde{M}$ は準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層.
(2) S が Noether かつ M が有限生成なら, $\widetilde{M}$ は連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層.

証明は [H77, p.116, Proposition 5.11, Chap.II §5] を参照せよ.

定義. S を次数付き環とし, $X = \operatorname{Proj} S$ とする. $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{O}_X(n)$ を

$$\mathcal{O}_X(n) := \widetilde{S(n)}$$

で定める. $\mathcal{O}_X(1)$ を Serre のねじり層[*2] (twisting sheaf) と呼ぶ.

以下では $\mathcal{O}_X$ 加群層のテンソルの記号を $\otimes := \otimes_{\mathcal{O}_X}$ と略記する.

補題. $S = \oplus_{n \geq 0} S_n$ は次数付き環であって S_0 代数として S_1 で生成されるものとし, $X = \operatorname{Proj} S$ とする.
(1) $\mathcal{O}_X(n)$ は可逆層.
(2) $\mathcal{O}_X(m) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) \simeq \mathcal{O}_X(m+n)$.

[*1] 2018/12/12 版, ver. 0.4.
[*2] [H77] の訳語に従いましたが, あまり使われないように思います. 個人的には $\mathcal{O}(1)$ と書いて「オーワン」とよんでいます.

証明は [H77, p.117, Proposition 5.12, Chap.II §5] を参照せよ.

以下では $\mathbb{P}^n_A = \operatorname{Proj} A[x_0, \dots, x_n]$ へのスキームの埋め込みを考える. 層 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(1)$ を単に $\mathcal{O}(1)$ と書く.

定理 8.1.1. A を環とし, X を A 上のスキームとする.

(1) $\varphi : X \to \mathbb{P}^n_A$ を A スキームの射とする. このとき $\varphi^*(\mathcal{O}(1))$ は X 上の可逆層であり, 大域切断 $s_i := \varphi^*(x_i)$ $(i = 0, \dots, n)$ で生成される.

(2) $\mathcal{L}$ は X 上の可逆層であって大域切断 $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ で生成されるものとする. このとき, A スキームの射 $\varphi : X \to \mathbb{P}^n_A$ であって $\mathcal{L} \simeq \varphi^*(\mathcal{O}(1))$ かつ $s_i = \varphi^*(x_i)$ となるものが, 同型を除いて一意に存在する.

ここで次の用語を用いた.

定義. X をスキームとし, $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$ 加群層とする. $\mathcal{F}$ が**大域切断** $\{s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F}) \mid i \in I\}$ **で生成される**とは, 各 $x \in X$ に対して $\{(s_i)_x \in \mathcal{F}_x \mid i \in i\}$ が $\mathcal{O}_{X,x}$ 加群として $\mathcal{F}_x$ を生成することをいう.

定理 8.1.1 の証明は [H77, p.150, Theorem 7.1, Chap.II §7] を参照せよ.

A スキームの射 $\varphi : X \to \mathbb{P}^n_A$ が埋め込みになるための条件を考えよう.

定義. Y をスキームとし, $g : \mathbb{P}^r_Y = \mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} Y \to \mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}}$ をファイバー積の定める射とする. $\mathbb{P}^r_Y$ **上の捩じり層** $\mathcal{O}(1)$ を, g による引き戻し $g^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}}}(1))$ で定義する.

スキームの射 $i : X \to Z$ が埋め込みであるとは, i が Z の閉部分スキームの開部分スキームと X との同型を与えることを言う (部分スキームの定義 2.3.4 を参照).

定義. Y をスキームとし, X を Y スキームとする. X 上の可逆層 $\mathcal{L}$ が Y に関して**非常に豊富** (very ample) であるとは, 埋め込み $i : X \to \mathbb{P}^r_Y$ があって $i^*(\mathcal{O}(1)) \simeq \mathcal{L}$ となるもののことをいう.

補題 8.1.2. Y を Noether スキームとする. このとき, Y スキーム X について,

$$X \text{ は } Y \text{ 上射影的} \iff X \text{ は } Y \text{ 上固有的かつ, } X \text{ 上の可逆層で } Y \text{ に関して非常に豊富なものが存在する.}$$

証明は X 上の可逆層 $i^*(\mathcal{O}(1))$ を考えればよい.

定義. Noether スキーム X 上の可逆層 $\mathcal{L}$ が**豊富** (ample) であるとは, 任意の連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{F}$ に対してある $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ があって, $n \geq n_0$ なら $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ が大域切断で生成されることをいう.

命題 8.1.3. A を Noether 環とし, X を A 上射影的なスキームとする. $\mathcal{L}$ が X 上の可逆層であって A に関して非常に豊富なら, $\mathcal{L}$ は豊富である.

証明は [H77, p.121, Theorem 5.17, Chap.II §5] を参照せよ.

定理 8.1.4. A を Noether 環とし, X を A 上の有限型スキームとする. $\mathcal{L}$ を X 上の可逆層とする. このとき

$$\mathcal{L} \text{ は豊富} \iff \text{ある } n \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ があって } \mathcal{L}^{\otimes n} \text{ は } A \text{ に関して非常に豊富.}$$

証明は [H77, p.154, Theorem 7.6, Chap.II §7] を参照せよ.

8.2 線形系

この副節では X を代数閉体 k 上の非特異完備多様体とする．特に次の主張が成立する．

注意 8.2.1. (1) X 上の Weil 因子と Cartier 因子は一致する (補題 5.5.2) ので, 単に因子と呼ぶ.

(2) 因子の線形同値類と可逆層の同型類が 1 対 1 に対応する (命題 3.6.2).

(3) X 上の任意の可逆層 $\mathcal{L}$ について大域切断の空間 $\Gamma(X, \mathcal{L})$ は k 上有限次元である (定理 5.3.3).

定義. $\mathcal{L}$ を X 上の可逆層とし, $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}) \setminus \{0\}$, 即ち s を $\mathcal{L}$ の 0 でない大域切断とする．**s の零点から定まる因子** $(s)_0$ を次のように定める．

- $\varphi : \mathcal{L}|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$ を $U \subset X$ 上での局所自由化とすれば $\varphi(s) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$．このような U で X が被覆できるので, $\{U, \varphi(s)\}$ でもって X 上の Cartier 因子が定まる．

注意. この定義で, φ は $\Gamma(U, \mathcal{O}_U^*)$ の元による積を除いて一意に決まるので, $(s)_0$ は well-defined. また $(s)_0$ は有効因子である．

命題 8.2.2. D を X の因子とする．

(1) 任意の $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}(D)) \setminus \{0\}$ について, $(s)_0 \sim D$.

(2) D と線形同値な有効因子は全て, 適当な $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}(D)) \setminus \{0\}$ でもって $D = (s)_0$ と書ける.

(3) 任意の $s, s' \in \Gamma(X, \mathcal{O}(D)) \setminus \{0\}$ について, $(s)_0 = (s')_0 \iff$ ある $c \in k^*$ があって $s' = cs$.

証明は [H77, p.157, Proposition 7.7, Chap.II §7] を参照せよ．

定義. D を X の因子とする．

$$|D| := \{D \text{ と線形同値な有効因子 }\}$$

を D の**完備線形系** (complete linear system) という．

体 k 上の線形空間 V に対し, それが定める射影空間を $\mathbb{P}(V) := \bigl(V \setminus \{0\}\bigr)/k^*$ とする．命題 8.2.2 から直ちに次の系を得る．

系. 次のような全単射が存在する．

$$|D| \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}\bigl(\Gamma(X, \mathcal{O}(D))\bigr).$$

つまり完備線形系は射影空間と見なせる．その部分空間を線形系と呼ぶのであった．即ち,

定義. X の**線形系** (linear system) Λ とは, ある因子 D と k 線形部分空間 $V \subset \Gamma(X, \mathcal{O}(D))$ があって, 上の同一視 $|D| \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}\bigl(\Gamma(X, \mathcal{O}(D)\bigr)$ のもと $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V)$ とかけるもののことである．また, Λ の**次元**を $\dim \Lambda := \dim_k V - 1$ で定義する．

注意. 注意 8.2.1 (3) より $\dim \Lambda$ は常に有限である．

定義. Λ を X の線形系とし, $l := \dim \Lambda$ とする．有理写像 $\Phi_\Lambda : X \dashrightarrow \mathbb{P}_k^l$ が次のように定まる．

(i) 任意に $D' \in \Lambda$ を取る．$D' = (s)_0$ となる $s \in V \setminus \{0\}$ を 1 つ取り, $V' := V \cdot 1/s$ とする．V' の k 線形空間としての基底を $\varphi_0 = 1, \varphi_1, \ldots, \varphi_l$, $l := \dim \Lambda$ とする．そして次の写像を考える．

$$X \setminus D' \ni p \longmapsto (\varphi_0(p) : \varphi_1(p) : \cdots : \varphi_l(p)) \in \mathbb{P}_k^l.$$

基底の選び方を変えても $\mathbb{P}^l_k$ の自己同型で写せるので, $X \setminus D' \to \mathbb{P}^l_k$ は well-defined.

(ii) D' を取り換えることで, $X \setminus D'$ 上の正則写像を代表にもつ有理写像 Φ_Λ が定義される.

Φ_Λ の構成法から

$$\operatorname{dom}\Phi_\Lambda \supset \bigcup_{D' \in \Lambda}(V \setminus D') = V \setminus \bigcap_{D' \in \Lambda} D'$$

となるので, $\cap_{D' \in \Lambda} D'$ に名前を付けておくのが自然である.

定義. X の線形系 Λ に対し, $\cap_{D' \in \Lambda} D' \subset X$ の元を Λ の**基点** (base point) という. $\cap_{D' \in \Lambda} D' = \emptyset$ となる Λ を基点のない線形系 (base-point-free linear system) と呼ぶ.

この定義から直ちに

命題 8.2.3. Λ を $V \subset \Gamma(X, \mathcal{O}(D))$ に対応する X の線形系だとする. Λ が基点のない線形系であることと $\mathcal{O}(D)$ が V の大域切断で生成されることは同値.

問題 8.1 $(*)$**.** $X = \mathbb{P}^n_k$, $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. X 上の次数 d の有効因子全体の集合は, ある因子 D の完備線形系 $|D|$ であり, その線形系としての次元は $\binom{n+d}{n} - 1$ であることを示せ.

問題 8.2 $(**)$**.** X を代数閉体 k 上の非特異射影多様体とする. D を X 上の因子とする. D が非常に豊富だと仮定する. 対応する埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^m_k$ に関する斉次座標環 $S(X)$ の Hilbert 多項式 [H77, Chap.I §7] を $P_X(n)$ と書く. このとき, 十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対し $\dim|nD| = P_X(n) - 1$ となることをしめせ.

8.3 射影直線の特徴づけ

この副節では, C を代数閉体 k 上の非特異完備代数曲線とする. $K := K_C$ を C の標準因子とし, $g := g(C)$ を C の種数とする. まだ C の因子 D に対し $l(D) := \dim_k H^0(C, \mathcal{O}(D))$ と書く.

定理 8.3.1. $g = 0$ なら $C \simeq \mathbb{P}^1_k$.

証明のためにいくつかを準備する.

補題 8.3.2. D を C の因子とする.

(1) $l(D) \neq 0$ なら $\deg D \geq 0$.

(2) $l(D) \neq 0$ かつ $\deg D = 0$ なら $D \sim 0$.

証明. $l(D) \neq 0$ なら完備線形系 $|D|$ は空でない. よって D はある有効因子 D' と線形同値. すると $\deg D = \deg D'$ かつ $\deg D' \geq 0$ なので $\deg D \geq 0$. 更に $\deg D = 0$ なら D は次数 0 のある有効因子と線形同値だが, そのような因子は零因子しかない. □

定理 8.3.3. X が体 K 上の正規代数多様体で, $f : X \to \mathbb{P}^n_K$ が有理写像なら

$$\operatorname{codim}(X \setminus \operatorname{dom} f) \geq 2.$$

証明. 余次元 1 の既約成分があるとして, それを Y とする. $p \in \operatorname{dom} f$ をとり $f(p) = (\varphi_0(p) : \cdots : \varphi_n(p)) \in \mathbb{P}^n_K$ と書く. $\varphi_0(p) \neq 0$ と仮定してよい. $\psi_j := \varphi_j/\varphi_0$ とし, $\psi_j \in K(X)$ とみて, 必要なら番号を取り換

えて $\mathrm{ord}_Y\,\psi_1 \le \cdots \le \mathrm{ord}_Y\,\psi_n$ とすると $\mathrm{ord}_Y\,\psi_1 < 0$. すると, $f = (1/\psi_1 : 1 : \cdots : \psi_n/\psi_1)$ とみれば, $\mathrm{ord}_Y\,\psi_j/\psi_1 \ge 0$ より f は Y の生成点 η で正則になる. これは仮定と矛盾する. □

系 8.3.4. 非特異完備代数曲線の有理写像 $f : C_1 \dashrightarrow C_2$ は正則写像 (スキームの射) である. 特に f が双有理写像ならば同型射である.

証明. 定理 8.3.3 より従う. □

命題 8.3.5. C の因子 D で $l(D) = 2$ かつ $\deg D = 1$ を満たすものがあれば $C \simeq \mathbb{P}^1$.

証明. $l(D) > 1$ なので, 必要なら D を $|D|$ の元と取り換えて, $D > 0$ と仮定してよい. すると $\deg D = 1$ より $D = P$ (1 点). $l(D) = 2$ だから, Φ_D は非特異完備代数曲線の有理写像 $C \dashrightarrow \mathbb{P}_k^{l(D)-1} = \mathbb{P}_k^1$ となる. また, $Q \in \mathbb{P}_k^1$ をとると, $\Phi_D^*(Q) \sim P$ より $1 = \deg P = \deg \Phi_D \cdot \deg Q$ となり, $\deg \Phi_D = 1$. 特に Φ_D は双有理写像となるので, 系 8.3.4 より同型射. □

定理 8.3.1 の証明. 閉点 $P \in C$ に対して, $\deg(K - P) = -3$ と補題 8.3.2 (1) から $l(K - P) = 0$. すると Riemann-Roch の定理 $l(D) = l(K - D) + 1 - g + \deg D$ より $l(P) = 2$. よって命題 8.3.5 を $D = P$ に適用できる. □

8.4 楕円曲線

引き続き C を代数閉体 k 上の非特異完備代数曲線とする. そして記号 $K := K_C$, $g := g(C)$ および $l(D) := \dim_k H^0(C, \mathcal{O}(D))$ も引き続き用いる.

定義. $g = 1$ となる C を**楕円曲線** (elliptic curve) と呼ぶ.

楕円曲線の群構造を思い出そう.

命題 8.4.1. 楕円曲線 C は以下のような加群の構造[*3]を持つ.

(i) 任意の閉点 $P_0 \in C$ を 1 つ取って固定し, これを加法の零元とする.

(ii) 対応 $P \mapsto \mathcal{O}(P - P_0)$ によって閉点の集合から $\mathrm{Pic}\,C$ への写像 φ が定まる. φ は全単射で, 従って $\mathrm{Pic}\,C$ の群構造を閉点の集合に引き戻せる. つまり

$$P + Q \;:=\; \varphi^{-1}\big(\mathcal{O}(P - P_0) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(Q - P_0)\big) \;=\; \varphi^{-1}\big(\mathcal{O}(P + Q - 2P_0)\big).$$

証明. φ が全単射であることを示せばよい. その為には, 次数 0 の任意の因子 D に対してある閉点 $P \in X$ があって $D \sim P - P_0$ となることを示せば十分. Riemann-Roch の定理を $D + P_0$ に用いて

$$l(D + P_0) - l(K - D - P_0) \;=\; 1 + 1 - 1.$$

ここで $\deg K = 0$ から $\deg(K - D - P_0) < 0$ となって, 補題 8.3.2 (1) より $l(K - D - P_0) = 0$. よって $l(D + P_0) = 1$ で, 特に $D + P_0$ と線形同値な有効因子 D' が一意に存在する. $\deg D' = 1$ なので D' は閉点 $P \in C$ でなければならない. □

Riemann-Roch の定理のもう一つの応用として, Weierstrass の標準形を取り上げよう.

[*3] 正確には**群スキーム** (group scheme) の構造を持つことが言えます.

C を楕円曲線とし, $P \in C$ を閉点とする. Riemann-Roch の定理から $l(P)-l(K-P)=1-g+\deg P=1$. 一方で $\deg(K-P)=\deg K-1=-1$ なので補題 8.3.2 (1) より $l(k-P)=0$. 従って $l(P)=1$. 同様に Riemann-Roch の定理を繰り返し使って

$$l(P) = 1,\ l(2P) = 2,\ \ldots,\ l(6P) = 6$$

となる. そこで

$$\varphi \in \Gamma(C, \mathcal{O}(2P)) \setminus k, \quad \psi \in \Gamma(C, \mathcal{O}(3P)) \setminus \Gamma(C, \mathcal{O}(2P))$$

が取れる. そしてこれらから

$$1, \varphi, \psi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi\psi, \psi^2 \in \Gamma(C, \mathcal{O}(6P))$$

と 7 つの元が得られる. $l(6P)=6$ だったから, 1 次関係式

$$a_0 + a_1\varphi + a_2\psi + a_3\varphi^2 + a_4\varphi^3 + a_5\varphi\psi + a_6\psi^2 = 0$$

ができる. ここで $a_6 \neq 0$ に注意する. 実際, $a_6 = 0$ だと $\mathrm{ord}_P\,\varphi^3 = -6$ と他の元の $\mathrm{ord}_P < -6$ に矛盾する. そこで $a_6 = 1$ として, 上の関係式は $\psi^2 + (a_2 + a_5\varphi)\psi + \cdots = (\psi + (a_2 + a_5\varphi)/2)^2 + \cdots$ と変形できる. そこで $\psi + (a_2 + a_5\varphi)/2$ を ψ と置きなおして, 更に φ に 1 次変換を施すと, 上の関係式は

$$\psi^2 = 4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3, \quad g_2, g_3 \in k \tag{8.1}$$

となる.

定義 8.4.2. (8.1) を楕円曲線の **Weierstrass の標準形**という.

問題 8.3 (∗)**.** (8.1) の導出の詳細を埋めよ.

参考文献

[H77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer, 1977;
高橋宣能, 松下大介訳, 代数幾何学 **1,2,3**, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2008.

以上です.