2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV 11 月 15 日分レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

7 曲線の Riemann-Roch の定理

この節では代数閉体 k 上の**非特異完備代数曲線**のことを**曲線**と呼ぶ. また C と書いたら曲線のこととする. つまり, C は代数閉体 k 上固有な 1 次元整スキームであって, 任意の点での局所環は正則である.

C の構造層 $\mathcal{O}_C$ を $\mathcal{O}$ と略記する. また, C の標準層 $\omega_C = \Omega^1_{C/k}$ を ω と略記する. C の標準因子 K_C のことも K と略記する. 特に $\mathcal{O}(K) = \omega$ となる.

7.2 Riemann-Roch の定理

定理 7.2.1 (Riemann-Roch の定理). C の因子 D に対し $l(D) := \dim_k H^0(C, \mathcal{O}(D))$ と定める. この時

$$l(D) - l(K-D) \;=\; 1 - g + \deg D.$$

系 7.2.2. $\deg K = 2g-2$.

問題 7.1 $(*)$**.** 系 7.2.2 の $g=0$ の場合を次のように確認せよ: $\mathbb{P}^1$ の斉次座標を $[Z_0 : Z_1]$ と書き, 非斉次座標を $z := Z_1/Z_0$, $w := Z_0/Z_1$ と書く. $\omega_{\mathbb{P}^1}$ の切断が $Z_0 \neq 0$ の点では dz と書けることから, $\deg K = -2$.

問題 7.2 $(**)$**.** 系 7.2.2 の $g=1$ の場合を, 問題 7.1 のように具体的な ω の切断を考えることで示せ.

7.3 曲線の分岐

定義. スキームの射 $f : X \to Y$ が**有限** (finite) であるとは, アフィン開被覆 $Y = \cup_{i \in I} V_i$, $V_i = \operatorname{Spec}(B_i)$ であって $f^{-1}(V_i) = \operatorname{Spec}(A_i)$ と逆像がアフィンになり, 更に B_i 代数 A_i が B_i 加群として有限生成になるもののことである.

命題 7.3.1. k を (代数閉体とは限らない) 体とする. X を k 上の非特異完備代数曲線, Y を k 上の代数曲線. $f : X \to Y$ をスキームの射とする. このとき次の (i) と (ii) のどちらかが成立する.

(i) $f(X)$ は 1 点.　　(ii) $f(X) = Y$.

更に (ii) の場合, 次の 3 つが成立する.

(a) 有理関数体 $K(X)$ は $K(Y)$ の有限次拡大.　　(b) f は有限射.　　(c) Y は完備.

定義. $x \in X$ をスキーム X の非特異点, つまり局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ が正則局所環であるものとする. $n := \dim \mathcal{O}_{X,x}$ とする. $\mathcal{O}_{X,x}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ の n 元生成系, つまり $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ となるような $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathcal{O}_{X,x}$ を x における**正則パラメータ系** (regular system of parameters) と呼ぶ.

特に曲線 C の閉点 $P \in C$ について, P での局所環 $\mathcal{O}_{C,P}$ は 1 次元正則局所環なので, 極大イデアルは単元生成であり, その生成元を正則パラメータと呼ぶ.

また, 命題 3.3.3 より, $\mathcal{O}_{C,P}$ の商体 $Q(\mathcal{O}_{C,P})$ は $\mathcal{O}_{C,P}$ による離散付値

$$v_P : Q(\mathcal{O}_{C,P}) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \quad v_P^{-1}(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \;=\; \mathcal{O}_{C,P} \tag{7.1}$$

を持つ. これを $P \in C$ での付値と呼ぼう.

[*1] 2018/11/15 版, ver. 0.2.

定義 7.3.2. $f : X \to Y$ を曲線の有限射とする．$P \in X$ を閉点とし, $Q := f(P)$ とする．

(1) 射 f の P での**分岐指数** (ramification index) e_P を次のように定義する．$Q \in Y$ での正則パラメータを t とする．局所環の局所的準同型 $f_P^\sharp : \mathcal{O}_{Y,Q} \to \mathcal{O}_{X,P}$ (定義 1.6.5) により t を $P \in X$ での正則パラメータとみなす．そして

$$e_P \;:=\; v_P(t).$$

とする．ここで v_P は $P \in X$ での付値 (7.1).

(2) $e_P > 1$ のとき, f は P で**分岐している** (ramified) という．また P を f の**分岐点** (ramification point) と呼び, Q を**分岐値** (branch point) と呼ぶ．
$e_P = 1$ のとき, f は P で**不分岐である** (unramified) という．

(3) $P \in X$ は f の分岐点とする．$\operatorname{char} k = 0$ または $\operatorname{char} k \nmid e_P$ のとき, P での分岐は**通常** (ordinary) であるという．$\operatorname{char} k \nmid e_P$ なら分岐は**野性的** (wild) であるという[*2].

7.4 Hurwitz の定理

定義. 曲線の間の有限射 $f : X \to Y$ に対し, 加群準同型 $f^* : \operatorname{Div} Y \to \operatorname{Div} X$ を次のように定義する[*3].

(i) 閉点 $Q \in Y$ に対して

$$f^*Q \;:=\; \sum_{P \in X,\, f(P)=Q} v_P(t)P.$$

但し t は $Q \in Y$ での正則パラメータで, $v_P(t)$ は定義 7.3.2 と同様.

(ii) 一般の $D = \sum_Q m_Q Q \in \operatorname{Div} Y$ に対しては (i) を線形に拡張して f^*D を定義する．

定義. $f : X \to Y$ を曲線の有限射であって, $K(X)/K(Y)$ が分離拡大になるものとする．f の**分岐因子** (ramification divisor) $R_f \in \operatorname{Div} X$ を次で定義する．

$$R_f \;:=\; \sum_{P \in X} (\operatorname{length} \Omega_{X/Y,P})P.$$

定理 7.4.1 (標準因子の分岐公式). $f : X \to Y$ を曲線の有限射であって, $K(X)/K(Y)$ が分離拡大になるものとする．K_X と K_Y をそれぞれの曲線の標準因子とする．このとき

$$K_X \;\sim\; f^*K_Y + R_f$$

系 7.4.2 (Hurwitz の定理). $f : X \to Y$ を曲線の有限射であって, $K(X)/K(Y)$ が分離拡大になるものとする．$\deg f := [K(X) : K(Y)]$ とすると

$$2g(X) - 2 \;=\; (\deg f) \cdot (2g(Y) - 2) + \deg R_f.$$

更にもし f の分岐点が全て通常なら

$$\deg R_f = \sum_{P \in X} (e_P - 1).$$

問題 7.3 ($**$). C を次数 d の既約な平面曲線とする．つまり, 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の斉次座標を $[X : Y : Z]$ と書くと, C は既約な d 次多項式 $f(X, Y, Z) \in k[X, Y, Z]$ の零点に付随する $\mathbb{P}^2$ 内の (非特異とは限らない) 代数曲線だとする．このとき, 算術種数が $p_a(C) = (d-1)(d-2)/2$ となること, 及び幾何種数が $p_g(C) \leq (d-1)(d-2)/2$ となることを示せ．

以上です．

[*2] ver. 0.2 で訂正しました．
[*3] ver. 0.2 で訂正しました．