2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　11 月 15 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

7　曲線の Riemann-Roch の定理

この節では代数閉体 k 上の**非特異完備代数曲線**のことを**曲線**と呼ぶ. また C と書いたら曲線のこととする. つまり, C は代数閉体 k 上固有な 1 次元整スキームであって, 任意の点での局所環は正則である.

C の構造層 $\mathcal{O}_C$ を $\mathcal{O}$ と略記する. また, C の標準層 $\omega_C = \Omega^1_{C/k}$ を ω と略記する. C の Weil 因子と Cartier 因子は同じものなので (補題 5.5.2 (2)), これらを単に C の因子とよぶ. $\mathcal{O}(K_C) = \omega$ となる C の因子 K_C が一意に存在するが, これを C の標準因子と呼ぶのだった (定義 6.2.3). K_C のことも K と略記しよう.

7.1　曲線の種数

C の算術種数 $p_a(C)$ (定義 5.3.4, 問題 5.3 (2)) と幾何種数 $p_g(C)$ (定義 6.3.1) を思い出そう.

$$p_a(C) \;=\; \dim_k H^1(C, \mathcal{O}), \quad p_g(C) \;=\; \dim_k H^0(C, \mathcal{O}(K)).$$

命題 7.1.1. C の算術種数と幾何級数は一致する: $p_a(C) = p_g(C)$.

証明. 次の補題 7.1.2 で $D = 0$ としたものである. □

補題 7.1.2 (曲線における **Serre** 双対性)**.** C の因子 D に対して

$$\dim_k H^1(C, \mathcal{O}(D)) \;=\; \dim_k H^0(C, \mathcal{O}(K - D)).$$

証明. Serre 双対性 (定理 6.4.4) より $H^1(C, \mathcal{O}(D)) \simeq H^{1-1}(C, \mathcal{O}(D)^\vee \otimes_{\mathcal{O}} \omega)^*$. ここで $\mathcal{H}om$ (定義 6.4.3) を用いると $\mathcal{O}(D)^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(D), \mathcal{O}) \simeq \mathcal{O}(-D)$. これと $\omega \simeq \mathcal{O}(K)$ より $\mathcal{O}(D)^\vee \otimes_{\mathcal{O}} \omega \simeq \mathcal{O}(-D) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(K) \simeq \mathcal{O}(K - D)$. よって $H^1(C, \mathcal{O}(D)) \simeq H^0(C, \mathcal{O}(K - D))^*$. □

定義. 次式で定義される $g(C)$ を C の**種数** (genus) と呼ぶ.

$$g(C) \;:=\; p_a(C) \;=\; p_g(C).$$

7.2　Riemann-Roch の定理

§5.5 で考えたように, C の因子 D は閉点 $p_i \in C$ と $m_i \in \mathbb{Z}$ を用いて $D = \sum_i m_i p_i$ と有限和で書ける. このような D に対し, $\deg D := \sum_i m_i \deg p_i$, $\deg p_i := [k(p_i) : k]$ と定めた (定義 5.5.3).

定理 7.2.1 (**Riemann-Roch の定理**)**.** C の因子 D に対し $l(D) := \dim_k H^0(C, \mathcal{O}(D))$ と定める. この時

$$l(D) - l(K - D) \;=\; 1 - g + \deg D.$$

証明. $\dim := \dim_k$ と略記する. 系 5.5.5 より $l(D) - \dim H^1(C, \mathcal{O}(D)) = 1 - \dim H^1(C, \mathcal{O}) + \deg D$. よって $\dim H^1(C, \mathcal{O}(D)) = \dim H^0(C, \mathcal{O}(K - D))$ と $\dim H^1(C, \mathcal{O}) = \dim H^0(C, \omega)$ を示せばよいが, これは補題 7.1.2 から従う. □

[*1] 2018/11/15 版, ver. 0.3.

系 7.2.2. $\deg K = 2g - 2$.

証明. 定理 7.2.1 で $D = K$ とする. □

問題 7.1 (∗). 系 7.2.2 の $g = 0$ の場合を次のように確認せよ: $\mathbb{P}^1$ の斉次座標を $[Z_0 : Z_1]$ と書き, 非斉次座標を $z := Z_1/Z_0$, $w := Z_0/Z_1$ と書く. $\omega_{\mathbb{P}^1}$ の切断が $Z_0 \neq 0$ の点では dz と書けることから, $\deg K = -2$ を導け.

問題 7.2 (∗∗). 系 7.2.2 の $g = 1$ の場合を, 問題 7.1 のように具体的な ω の切断を考えることで示せ.

曲線の種数の計算における強力な公式が Riemann-Hurwitz の公式である. これを §7.4 で説明するが, その前に曲線の分岐についてまとめておく.

7.3 曲線の分岐

まず有限射の定義から始めよう.

定義. スキームの射 $f : X \to Y$ が**有限** (finite) であるとは, アフィン開被覆 $Y = \cup_{i \in I} V_i$, $V_i = \mathrm{Spec}(B_i)$ であって $f^{-1}(V_i) = \mathrm{Spec}(A_i)$ と逆像がアフィンになり, 更に B_i 代数 A_i が B_i 加群として有限生成になるもののことである.

注意. 射が有限型 (of finite type) であること (定義 2.6.2) とは, 名前が似ているが別の概念である.

曲線の間の射に関しては次の事実が知られている.

命題 7.3.1. k を (代数閉体とは限らない) 体とする. X を k 上の非特異完備代数曲線, Y を k 上の代数曲線. $f : X \to Y$ をスキームの射とする. このとき次の (i) と (ii) のどちらかが成立する.
(i) $f(X)$ は 1 点. (ii) $f(X) = Y$.
更に (ii) の場合, 次の 3 つが成立する.
(a) 有理関数体 $K(X)$ は $K(Y)$ の有限次拡大. (b) f は有限射. (c) Y は完備.

証明は [H77, p.137, Proposition 6.8, Chap.II §5] を参照せよ. 特に, C_1 と C_2 を曲線とし, $f : C_1 \to C_2$ をスキームの射で $f(C_1) = C_2$ なるものとすると, f は有限射である.

次に分岐に関する諸概念を導入したい. そのために正則パラメータ系の定義を思い出しておく.

定義. $x \in X$ をスキーム X の非特異点, つまり局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ が正則局所環であるものとする. $n := \dim \mathcal{O}_{X,x}$ とする. $\mathcal{O}_{X,x}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ の n 元生成系, つまり $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ となるような $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathcal{O}_{X,x}$ を x における**正則パラメータ系** (regular system of parameters) と呼ぶ[*2].

特に曲線 C の閉点 $P \in C$ について, P での局所環 $\mathcal{O}_{C,P}$ は 1 次元正則局所環なので, 極大イデアルは単元生成であり, その生成元を正則パラメータと呼ぶ.

また, 命題 3.3.3 より, $\mathcal{O}_{C,P}$ の商体 $Q(\mathcal{O}_{C,P})$ は $\mathcal{O}_{C,P}$ による離散付値

$$v_P : Q(\mathcal{O}_{C,P}) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \quad v_P^{-1}(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) = \mathcal{O}_{C,P} \tag{7.1}$$

を持つ. これを $P \in C$ での付値と呼ぼう.

[*2] 局所パラメータ系ともいいます

定義 7.3.2. $f : X \to Y$ を曲線の有限射とする. $P \in X$ を閉点とし, $Q := f(P)$ とする.

(1) 射 f の P での**分岐指数** (ramification index) e_P を次のように定義する. $Q \in Y$ での正則パラメータを t とする. 局所環の局所的準同型 $f_P^\sharp : \mathcal{O}_{Y,Q} \to \mathcal{O}_{X,P}$ (定義 1.6.5) により t を $P \in X$ での正則パラメータとみなす. そして

$$e_P := v_P(t).$$

とする. ここで v_P は $P \in X$ での付値 (7.1).

(2) $e_P > 1$ のとき, f は P で**分岐している** (ramified) という. また P を f の**分岐点** (ramification point) と呼び, Q を**分岐値** (branch point) と呼ぶ*3.
$e_P = 1$ のとき, f は P で**不分岐である** (unramified) という.

(3) $P \in X$ は f の分岐点とする. $\operatorname{char} k = 0$ または $\operatorname{char} k \nmid e_P$ のとき, P での分岐は**通常** (ordinary) である*4 という. $\operatorname{char} k \nmid e_P$ なら分岐は**野性的** (wild) であるという*5.

次に曲線の有限射における微分加群の振舞いについてまとめておく. 体 k 上の代数多様体について, $\Omega_X := \Omega_{X/k}$ と略記する.

命題. $f : X \to Y$ を曲線の有限射であって, 有理関数体の拡大 $K(X)/K(Y)$ が分離拡大になるもの*6 とする.

(1) このとき次の $\mathcal{O}_X$ 加群層の短完全列がある.

$$0 \longrightarrow f^*\Omega_Y \longrightarrow \Omega_X \longrightarrow \Omega_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

(2) $\Omega_{X/Y}$ の台 (定義 2.3.3) は f の分岐点の集合と等しく, 有限集合である.

(3) 任意の閉点 $P \in X$ に対し, $\Omega_{X/Y,P}$ は長さ有限の直既約巡回 $\mathcal{O}_{X,P}$ 加群.

(4) $P \in X$ が f の通常分岐点なら $\operatorname{length} \Omega_{X/Y,P} = e_P - 1$. P が野性的分岐点なら $\operatorname{length} \Omega_{X/Y,P} > e_P - 1$.

証明は [H77, p.300, Proposition 2.1, 2.2, Chap.IV, §2] を参照せよ.

7.4 Hurwitz の定理

Hurwitz の定理は曲線の有限射 $f : X \to Y$ があったときの種数 $g(X)$ と $g(Y)$ の関係を述べるものである. それは標準因子の分岐公式から導けるものなので, 分岐公式の説明から始めよう.

まず因子の引き戻しを定義する. 因子群の記号 $\operatorname{Div} X$ を思い出しておく (定義 3.2.2).

定義. 曲線の間の有限射 $f : X \to Y$ に対し加群準同型 $f^* : \operatorname{Div} Y \to \operatorname{Div} X$ を*7 次のように定義する.

(i) 閉点 $Q \in Y$ に対して

$$f^*Q := \sum_{P \in X,\, f(P)=Q} v_P(t) P.$$

但し t は $Q \in Y$ での正則パラメータで, $v_P(t)$ は定義 7.3.2 と同様.

(ii) 一般の $D = \sum_Q m_Q Q \in \operatorname{Div} Y$ に対しては (i) を線形に拡張して f^*D を定義する.

---

*3 訳語が紛らわしいので英語の方が良く用いられます.
*4 数学辞典第 4 版に従いました. [H77, p.299, Chap.IV, §2] は tame と呼んでいます.
*5 ver. 0.3 で訂正しました.
*6 有理写像 $f : X \to Y$ は $K(X)/K(Y)$ が分離拡大の時**分離的** (separable) と呼ばれます. separated morphism (定義 2.6.1) と訳語の区別がないので注意しましょう.
*7 ver. 0.3 で訂正しました.

定義. $f : X \to Y$ を曲線の有限射であって, $K(X)/K(Y)$ が分離拡大になるものとする. f の**分岐因子** (ramification divisor) $R_f \in \operatorname{Div} X$ を次で定義する.

$$R_f := \sum_{P \in X} (\operatorname{length} \Omega_{X/Y,P}) P.$$

因子 D, D' が線形同値であることを $D \sim D'$ と表すこと (定義 3.4.2) を思い出しておこう.

定理 7.4.1 (**標準因子の分岐公式**)**.** $f : X \to Y$ を曲線の有限射であって, $K(X)/K(Y)$ が分離拡大になるものとする. K_X と K_Y をそれぞれの曲線の標準因子とする. このとき

$$K_X \sim f^* K_Y + R_f$$

証明は [H77, p.301, Proposition 2.3, Chap.IV, §2] を参照せよ.

系 7.4.2 (Hurwitz の定理)**.** $f : X \to Y$ を曲線の有限射であって, $K(X)/K(Y)$ が分離拡大になるものとする. $\deg f := [K(X) : K(Y)]$ とすると

$$2g(X) - 2 = (\deg f) \cdot (2g(Y) - 2) + \deg R_f.$$

更にもし f の分岐点が全て通常なら

$$\deg R_f = \sum_{P \in X} (e_P - 1).$$

注意. Hurwitz の定理で $k = \mathbb{C}$ かつ $Y = \mathbb{P}^1$ とすると, $g(Y) = 0$ で f は通常分岐点しか持たないから

$$g(X) = 1 - \deg f + \sum_{P \in X} \frac{e_P - 1}{2}.$$

これは Riemann の公式と呼ばれる.

問題 7.3 ($**$)**.** C を次数 d の既約な平面曲線とする. つまり, 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の斉次座標を $[X : Y : Z]$ と書くと, C は既約な d 次多項式 $f(X, Y, Z) \in k[X, Y, Z]$ の零点に付随する $\mathbb{P}^2$ 内の (非特異とは限らない) 代数曲線だとする. このとき, 算術種数が $p_a(C) = (d-1)(d-2)/2$ となること, 及び幾何種数が $p_g(C) \leq (d-1)(d-2)/2$ となることを示せ.

参考文献

[H77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer, 1977;
高橋宣能, 松下大介訳, **代数幾何学 1,2,3**, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2008.

以上です.