

2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV 11 月 08 日分レポート問題*¹

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida>

6 微分形式

6.1 相対微分形式

定義 6.1.1. R を環とし, A を R 代数とする. A 加群 $\Omega_{A/R}$ を以下の手順で定義する.

- (i) $B := A \otimes_R A$ を $(a_1 \otimes a_2) \cdot (a'_1 \otimes a'_2) := a_1 a'_1 \otimes a_2 a'_2$ でもって R 代数とみなす.
- (ii) R 代数準同型 $\mu : B \rightarrow A$ と $\lambda_1, \lambda_2 : A \rightarrow B$ を $\mu(a_1 \otimes a_2) := a_1 a_2$, $\lambda_1(a) := a \otimes 1_A$, $\lambda_2(a) := 1_A \otimes a$ で定義する. また B を λ_1 でもって A 代数とみなす.
- (iii) $I := \text{Ker}(\mu : B \rightarrow A)$ とし, $\Omega_{A/R} := I/I^2$ とする. $I, I^2, \Omega_{A/R}$ は B 加群だが, $\lambda_1 : A \rightarrow B$ により A 加群とみなす.

定義. R を環, A を R 代数とし, M を A 加群とする. R 上の導分 (derivation) $D : A \rightarrow M$ とは R 加群準同型であって Leibniz 則 $D(a \cdot b) = a \cdot (Db) + (Da) \cdot b$ を満たすものことである.

補題 6.1.2. 定義 6.1.1 の記号のもと, $p : B \rightarrow B/I^2$ を射影とし, $d := p \circ (\lambda_2 - \lambda_1)$ と定める. このとき d は R 上の導分 $d : A \rightarrow \Omega_{A/R}$ を与える.

問題 6.1 (*). 補題 6.1.2 を証明せよ.

定義 6.1.3. 環 R 上の代数 A に対し, 定義 6.1.1 の $\Omega_{A/R}$ と補題 6.1.2 の d の組 $(\Omega_{A/R}, d)$ のことを R 上での A の相対微分 1 形式の加群 (module of relative differential 1-forms), あるいは Kähler 微分加群 (module of Kähler differentials) と呼ぶ.

命題 6.1.4. 定義 6.1.3 の記号のもとで

- (1) R 代数の構造射 $R \rightarrow A$ の像を R と書くと, $d(R) = 0$.
- (2) $a, b \in A$ に対し $d(ab) = (da) \cdot b + a \cdot (db)$.
- (3) $\{da \mid a \in A\}$ は A 加群 $\Omega_{A/R}$ を生成する.

問題 6.2 (**). 命題 6.1.4 を証明せよ.

定義. A を環 R 上の代数とする. $p \in \mathbb{N}$ に対し A 加群 $\Omega_{A/R}^p$ を

$$\Omega_{A/R}^p := \wedge^p \Omega_{A/R} \quad (A \text{ 加群としての } p \text{ 次外積})$$

と定義し, A の R 上での相対微分 p 形式の加群と呼ぶ.

*¹ 2018/11/07 版, ver. 0.1.

6.2 相対微分形式の層

定義. $f: X \rightarrow Y$ をスキームの分離的射とする.

- (1) 以下で定まる \mathcal{O}_X 加群層 $\Omega_{X/Y}$ を X の Y 上での相対微分 1 形式の層又は **Kähler** 微分の層と呼ぶ.
 - (i) 分離性の定義 2.6.1 より $\Delta_{X/Y}: X \rightarrow X \times_Y X$ は閉埋入. それに対応するイデアル層 (§2.3) を $\mathcal{J}_X \subset \mathcal{O}_{X \times_Y X}$ と書く.
 - (ii) $\Omega_{X/Y} := \Delta_{X/Y}^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$ と定める. 但し $\Delta_{X/Y}^*$ は射 $\Delta_{X/Y}$ による逆像 (定義 5.4.1).
- (2) $p \in \mathbb{N}$ に対し, \mathcal{O}_X 加群層 $\Omega_{X/Y}^p$ を, $U \mapsto \wedge^p \Omega_{X/Y}(U)$ ($\mathcal{O}_X(U)$ 加群の外積) で定まる前層の層化として定義し, 相対微分 p 形式の層と呼ぶ. Y がアフィンスキーム $\text{Spec}(R)$ の場合は $\Omega_{X/R}$ と書く.

補題 6.2.1. R を環, A を R 代数とし, $X := \text{Spec}(A)$, $Y := \text{Spec}(R)$ とする. このとき $\Omega_{X/R} = \tilde{\Omega}_{A/R}$.

問題 6.3 (**). 補題 6.2.1 を証明せよ.

補題 6.2.2. X を代数閉体 k 上の n 次元非特異代数多様体とする. このとき $\Omega_{X/k}$ は階数 n の局所自由 \mathcal{O}_X 加群層. 従って $\Omega_{X/k}^p$ は階数 $\binom{n}{p}$ の局所自由 \mathcal{O}_X 加群層.

問題 6.4 (*). 補題 6.2.2 を証明せよ.

6.4 Serre 双対性

補題 6.4.2. \mathcal{F} と \mathcal{G} を位相空間 X 上の加群層とする. 開集合 $U \subset X$ に対し, $\text{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ を U 上の加群層の射のなす加群とする. このとき $U \mapsto \text{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ で定まる X 上の前層は層である.

問題 6.5 (*). 補題 6.4.2 を示せ.

定義 6.4.3. 補題 6.4.2 の層を $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ と書く. また X がスキームの時, 同様に構成される \mathcal{O}_X 加群層を $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ と書く.

定理 6.4.4. X が体 k 上射影的な Cohen-Macaulay スキームで, 全ての既約成分の次元が n に等しいものとする. このとき, 任意の局所自由 \mathcal{O}_X 加群層 \mathcal{F} に対し, $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ と書くと,

$$H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^{n-i}(X, \mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^\circ)^*.$$

命題 6.4.5. 体 k 上の n 次元非特異完備代数多様体 X と $p, q = 0, 1, \dots, n$ に対し

$$H^q(X, \Omega_{X/k}^p) \simeq H^{n-q}(X, \Omega_{X/k}^{n-p})^*.$$

注意. $h^{p,q} := \dim_k H^q(X, \Omega_X^p)$ は **Hodge 数** と呼ばれ, 重要な双有理不変量である.

以上です.