2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV 11 月 08 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

6 微分形式

今回はスキーム上の微分形式の復習をする.

6.1 相対微分形式

微分多様体における微分 1 形式 (正確には複素多様体における正則 1 形式) の代数的対応物を相対微分形式, または Kähler 微分といった. その復習から始めよう.

定義 6.1.1. R を環とし, A を R 代数とする. A 加群 $\Omega_{A/R}$ を以下の手順で定義する.

(i) $B := A \otimes_R A$ を $(a_1 \otimes a_2) \cdot (a'_1 \otimes a'_2) := a_1 a'_1 \otimes a_2 a'_2$ でもって R 代数とみなす.

(ii) R 代数準同型 $\mu : B \to A$ と $\lambda_1, \lambda_2 : A \to B$ を $\mu(a_1 \otimes a_2) := a_1 a_2$, $\lambda_1(a) := a \otimes 1_A$, $\lambda_2(a) := 1_A \otimes a$ で定義する. また B を λ_1 でもって A 代数とみなす.

(iii) $I := \mathrm{Ker}(\mu : B \to A)$ とし, $\Omega_{A/R} := I/I^2$ とする. $I, I^2, \Omega_{A/R}$ は B 加群だが, $\lambda_1 : A \to B$ により A 加群とみなす.

$\Omega_{A/R}$ の性質を述べるために, まず導分を導入する.

定義. R を環, A を R 代数とし, M を A 加群とする. R 上の**導分** (derivation) $D : A \to M$ とは R 加群準同型であって Leibniz 則 $D(a \cdot b) = a.(Db) + (Da).b$ を満たすもののことである.

補題 6.1.2. 定義 6.1.1 の記号のもと, $p : B \to B/I^2$ を射影とし, $d := p \circ (\lambda_2 - \lambda_1)$ と定める. このとき d は R 上の導分 $d : A \to \Omega_{A/R}$ を与える.

問題 6.1 $(*)$**.** 補題 6.1.2 を証明せよ.

命題. 組 $(\Omega_{A/R}, d)$ は次のような普遍性を持つ: R 上の導分 $D : A \to M$ に対し, A 加群準同型 $f : \Omega_{A/R} \to M$ で $D = f \circ d$ となるものが一意に存在する.

証明は [松80, §25] を参照せよ.

定義 6.1.3. 環 R 上の代数 A に対し, 定義 6.1.1 の $\Omega_{A/R}$ と補題 6.1.2 の d の組 $(\Omega_{A/R}, d)$ のことを R 上での A の**相対微分 1 形式の加群** (module of relative differential 1-forms), あるいは **Kähler 微分加群** (module of Kähler differentials) と呼ぶ.

[*1] 2018/11/08 版, ver. 0.3.

命題 6.1.4. 定義 6.1.3 の記号のもとで

(1) R 代数の構造射 $R \to A$ の像を R と書くと, $d(R) = 0$.

(2) $a, b \in A$ に対し $d(ab) = (da) \cdot b + a \cdot (db)$.

(3) $\{da \mid a \in A\}$ は A 加群 $\Omega_{A/R}$ を生成する.

問題 6.2 $(**)$**.** 命題 6.1.4 を証明せよ.

次の定理は $\Omega_{A/k}$ が自由加群になることと A が正則であることの同値性を主張する. しかし, やや複雑な仮定が必要なこと, 特に k **は完全体**という条件を課していることに注意する.

定理 6.1.5. k を完全体 (perfect field) とする. また A は局所環であって, k を含み, A の剰余体が k と同型であるものとする. 更に A は有限生成 k 代数の局所化になっているものとする. このとき

$$\Omega_{A/k} \text{ は自由 } A \text{ 加群} \iff A \text{ は正則局所環.}$$

証明は [H77, p.174, Chap.II, §8, Theorem 8.8] を参照せよ.

定義. A を環 R 上の代数とする. $p \in \mathbb{N}$ に対し A 加群 $\Omega^p_{A/R}$ を

$$\Omega^p_{A/R} := \wedge^p \Omega_{A/R} \quad (A \text{ 加群としての } p \text{ 次外積})$$

と定義し, A の R 上での**相対微分** p **形式の加群**と呼ぶ.

6.2 相対微分形式の層

ここでは前副節の諸概念のスキームでの対応物を考える.

定義. $f : X \to Y$ をスキームの分離的射とする.

(1) 以下で定まる $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\Omega_{X/Y}$ を X の Y 上での**相対微分 1 形式の層**又は **Kähler 微分の層**と呼ぶ.

  (i) 分離性の定義 2.6.1 より $\Delta_{X/Y} : X \to X \times_Y X$ は閉埋入. それに対応するイデアル層 (§2.3) を $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X \times_Y X}$ と書く.

  (ii) $\Omega_{X/Y} := \Delta^*_{X/Y}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ と定める. 但し $\Delta^*_{X/Y}$ は射 $\Delta_{X/Y}$ による逆像 (定義 5.4.1).

(2) $p \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\Omega^p_{X/Y}$ を, $U \mapsto \wedge^p \Omega_{X/Y}(U)$ ($\mathcal{O}_X(U)$ 加群の外積) で定まる前層の層化として定義し, **相対微分** p **形式の層**と呼ぶ. Y がアフィンスキーム $\mathrm{Spec}(R)$ の場合は $\Omega_{X/R}$ と書く.

補題 6.2.1. R を環, A を R 代数とし, $X := \mathrm{Spec}(A)$, $Y := \mathrm{Spec}(R)$ とする. このとき $\Omega_{X/R} = \widetilde{\Omega}_{A/R}$.

問題 6.3 $(**)$**.** 補題 6.2.1 を証明せよ.

定理 6.1.5 から次の主張が従う.

補題 6.2.2. X を代数閉体 k 上の n 次元非特異代数多様体とする. このとき $\Omega_{X/k}$ は階数 n の局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群層. 従って $\Omega^p_{X/k}$ は階数 $\binom{n}{p}$ の局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群層.

問題 6.4 $(*)$**.** 補題 6.2.2 を証明せよ.

定義 6.2.3. X を体 k 上の n 次元非特異代数多様体とする.

(1) $\omega_X := \Omega^n_{X/k}$ を X の**標準層** (canonical sheaf) と呼ぶ.

(2) $\omega_X = \mathcal{O}_X(K_X)$ となる Cartier 因子を K_X と書き, X の**標準因子** (canonical divisor)[*2] と呼ぶ.

注意. 定義 6.2.3 (2) が well-defined であることを確認しておこう. 補題 6.2.2 より ω_X は可逆層. すると補題 3.6.3 より $\omega_X = \mathcal{O}_X(K_X)$ なる Cartier 因子 K_X が一意に存在する.

k が代数閉体なら, 代数多様体の因子に関する基本事実 (補題 5.5.2) より Cartier 因子と Weil 因子に区別はないから, K_X は単に "ω_X に対応する因子" として定義できる.

6.3 幾何種数

定義 6.3.1. X を体 k 上の非特異完備代数多様体とする. 次式で定まる $p_g(X) \in \mathbb{N}$ を X の**幾何種数** (geometric genus) と呼ぶ.

$$p_g(X) := \dim_k \Gamma(X, \omega_X).$$

幾何種数が重要なのは, それが双有理不変量であるということである. 双有理同値は定義 4.4.2 で導入した.

定理. 幾何種数は双有理不変量である. つまり X と Y が双有理同値なら $p_g(X) = p_g(Y)$.

証明は [H77, p.181, Theorem 8.19, Chap.II, §8] を参照せよ.

6.4 Serre 双対性

ここでは制限された形で Serre 双対性を紹介する.

定義. X を体 k 上固有なスキームとし, $n := \dim X$ とする. X の**双対層** (dualizing sheaf) とは, 連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層 ω_X° と線形写像 $t : H^n(X, \omega^\circ) \to k$ の組であって次の性質を満たすもののことである.

- 任意の連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{F}$ に対し, 自然に定まる k 双線形写像 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X^\circ) \times H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \omega_X^\circ)$ と t との合成が, k 線形同型 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \omega_X^\circ) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \omega_X^\circ)^*$ を与える.

定理 6.4.1. (1) 双対層 (ω_X°, t) は存在すれば一意である.

(2) 体上射影的なスキームは双対層を持つ.

(3) 代数閉体上の非特異完備代数多様体 X について $\omega_X^\circ \simeq \omega_X$.

証明はそれぞれ [H77, Chap.III, §7] の Proposition 7.2, Proposition 7.5, Corollary 7.12 を参照せよ.

Serre 双対性を述べるための最後の準備として

補題 6.4.2. $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ を位相空間 X 上の加群層とする. 開集合 $U \subset X$ に対し, $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ を U 上の加群層の射のなす加群とする. このとき $U \mapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ で定まる X 上の前層は層である.

問題 6.5 $(*)$**.** 補題 6.4.2 を示せ.

[*2] 記号が有理関数体 $K(X)$ と紛らわしいですが, しっかり区別しましょう.

定義 6.4.3. 補題 6.4.2 の層を $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})$ と書く[*3]. また X がスキームの時, 同様に構成される $\mathcal{O}_X$ 加群層を $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ と書く.

次の定理を **Serre 双対性** (Serre duality) と呼ぶ. この定理のおかげで, 双対層は層のコホモロジーの計算に大変役立つことになる.

定理 6.4.4. X が体 k 上射影的な Cohen-Macaulay スキームで, 全ての既約成分の次元が n に等しいものとする. このとき, 任意の局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{F}$ に対し, $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{O}_X)$ と書くと,

$$H^i(X,\mathcal{F}) \simeq H^{n-i}(X,\mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^\circ)^*.$$

証明は [H77, Corollary 7.7, Chap.III, §7] を参照せよ. Cohen-Macaulay 性の定義はしない. 非特異代数多様体は Cohen-Macaulay スキーム (正則局所環は Cohen-Macaulay 環) であることだけ知っていればよい.

命題 6.4.5. 閉体 k 上の n 次元非特異完備代数多様体 X と $p,q=0,1,\dots,n$ に対し

$$H^q(X,\Omega^p_{X/k}) \simeq H^{n-q}(X,\Omega^{n-p}_{X/k})^*.$$

証明. 定理 6.4.4 を $\mathcal{F} := \Omega_X^p$ に適用して, 定理 6.4.1 (2) と $(\Omega_X^p)^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X \simeq \Omega_X^{n-p}$ を用いればよい. □

注意. $h^{p,q} := \dim_k H^q(X,\Omega_X^p)$ は **Hodge 数**と呼ばれ, 重要な双有理不変量である.

参考文献

[H77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer, 1977;
高橋宣能, 松下大介訳, **代数幾何学 1,2,3**, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2008.

[松80] 松村英之, **可換環論**, 共立出版, 1980.

以上です.

[*3] [H77] の訳本では「局所的な射の層」または簡単に「射の層」と呼ばれています. 私は hom 層と呼んでいます.