2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　11 月 01 日分レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

5 層のコホモロジー

5.1 単射的分解とコホモロジー

定理 5.1.3. $X = (X, \mathcal{O}_X)$ を環付き空間とする.

(3) $\mathcal{O}_X$ 加群層の短完全列 $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ に対し, 各 $p \in \mathbb{N}$ について, $\mathcal{O}_X(U)$ 準同型 $\delta^p : H^p(U, \mathcal{G}) \to H^{p+1}(U, \mathcal{F})$ が定まって,

$$0 \to H^0(U,\mathcal{E}) \to H^0(U,\mathcal{F}) \to H^0(U,\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(U,\mathcal{E}) \to H^1(U,\mathcal{F}) \to H^1(U,\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^1} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\delta^{p-1}} H^p(U,\mathcal{E}) \to H^p(U,\mathcal{F}) \to H^p(U,\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(U,\mathcal{E}) \to H^{p+1}(U,\mathcal{F}) \to H^{p+1}(U,\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^{p+1}} \cdots$$

が $\mathcal{O}_X(U)$ 加群の完全列になる. これを**コホモロジー (長) 完全列**という.

5.2 高次順像

定理 5.2.1. X, Y をスキーム, $f : X \to Y$ をアフィン射とする. また $\mathcal{F}$ を準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層とする.

(1) $p \geq 1$ なら $R^p f_* \mathcal{F} = 0$.

(2) 任意の $p \geq 0$ に対し $H^p(Y, f_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^p(X, \mathcal{F})$.

5.3 層のコホモロジーの有限性定理と Euler-Poincaré 指標

定理 5.3.1 (Grothendieck 消滅定理)**.** X を n 次元 Noether 的空間とし, $\mathcal{F}$ を X 上の加群層とすると

$$H^p(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall p \geq n.$$

問題 5.1 ($*$)**.** Noether 環 A のスペクトラム $\mathrm{Spec}(A)$ は Noether 空間であることを示せ.

定理 5.3.2 (Serre)**.** 連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層と層としての射のなす圏 $\mathcal{C}oh(\mathcal{O}_X)$ は Abel 圏.

定義 5.3.4. V を体 k 上の完備代数的スキームとし, $\mathcal{F}$ を連接 $\mathcal{O}_V$ 加群層とする.

(1) $\mathcal{F}$ の **Euler-Poincaré 指標** (characteristics) を $\chi_V(\mathcal{F}) := \sum_{p \geq 0} (-1)^p \dim_k H^p(V, \mathcal{F})$ と定義する.

(2) $p_a(V) := (-1)^{\dim V}(\chi_V(\mathcal{O}_V) - 1)$. を V の**算術種数** (arithmetic genus) と呼ぶ.

定理 5.3.5 (Euler-Poincaré 指標の完全性)**.** $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ が $\mathcal{C}oh(\mathcal{O}_V)$ における完全系列である時,

$$\chi_V(\mathcal{E}) - \chi_V(\mathcal{F}) + \chi_V(\mathcal{G}) = 0.$$

[*1] 2018/10/31 版, ver. 0.1.

問題 5.2 ($*$)**.** コホモロジー長完全列 (定理 5.1.3 (3)) を用いて定理 5.3.5 を証明せよ.

問題 5.3 ($**$)**.** (1) 代数閉体 k 上の整スキーム X に対し $H^0(X, \mathcal{O}_X) \simeq k$ となることを示せ.

(2) 定義 5.3.4 で, 更に k を代数閉体と仮定し, また V を整スキームだと仮定する. このとき V の算術種数は次のように書けることを示せ.

$$p_a(V) = \sum_{i=0}^{\dim V - 1} \dim_k H^{r-i}(V, \mathcal{O}_V).$$

5.4 閉部分スキームの構造完全列

定義 5.4.1. 環付き空間の射 $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ と $\mathcal{O}_Y$ 加群層 $\mathcal{F}$ に対し,

$$f^*\mathcal{F} := f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

を $\mathcal{F}$ の**逆像** (inverse image) と呼ぶ. 但し f^{-1} は層の引き戻し (定義 2.1.3).

問題 5.4 ($**$ (f^{-1}, f_*) の随伴性)**.** $f : X \to Y$ を位相空間の連続写像とする. 以下の主張を示せ.

(1) X 上の任意の (集合の) 層 $\mathcal{F}$ に対し, 自然な射 $f^{-1}f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ が存在する.

(2) Y 上の任意の層 $\mathcal{E}$ に対し, 自然な射 $\mathcal{E} \to f_*f^{-1}\mathcal{F}$ が存在する.

(3) X 上の任意の層 $\mathcal{F}$ と Y 上の任意の層 $\mathcal{E}$ について, 自然な全単射 $\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, f_*\mathcal{F})$ が存在する. 但し Hom は層の射の集合を表す.

補題 5.4.2 (射影公式 (projection formula))**.** 環付き空間の射 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ と $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{E}$ および有限階数の局所自由 $\mathcal{O}_Y$ 加群層 $\mathcal{F}$ に対して, 次の自然な準同型 (注意 1.6.3 を参照) が存在する.

$$f_*(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{F}) \simeq f_*(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F}.$$

問題 5.5 ($*$)**.** 補題 5.4.2 を証明せよ.

命題 5.4.3. V を体 k 上の完備代数的スキーム, $\mathcal{F}$ を有限生成局所自由 $\mathcal{O}_V$ 加群層とする. また Y を V の閉部分スキームとする. この時

$$\chi_V(\mathcal{F}) = \chi_V(\mathcal{I}_Y \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{F}) + \chi_Y(j^*\mathcal{F}).$$

但し $\mathcal{I}_Y$ は $Y \subset V$ の定義イデアル層であり, また $j : Y \hookrightarrow V$ は閉埋入.

証明. テンソルの記号を $\otimes := \otimes_{\mathcal{O}_V}$ と簡略化する. 閉部分スキーム $Y \subset V$ の構造完全列 $0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_V \to j_*\mathcal{O}_Y \to 0$ に $\mathcal{F}$ をテンソル積すると, 局所自由層によるテンソル積函手は完全 (問題 5.6 参照) なので, $0 \to \mathcal{I}_Y \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to (j_*\mathcal{O}_Y) \otimes \mathcal{F} \to 0$ が完全列となる. また射影公式 (補題 5.4.2) から $(j_*\mathcal{O}_Y) \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} j_*(j^*\mathcal{F})$. よって完全列 $0 \to \mathcal{I} \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to j_*j^*\mathcal{F} \to 0$ を得る. $\mathcal{F} \in \mathcal{C}oh(\mathcal{O}_X)$ より $j^*\mathcal{F} \in \mathcal{C}oh(\mathcal{O}_Y)$ となり, 従って $j_*j^*\mathcal{F} \in \mathcal{C}oh(\mathcal{O}_X)$. よって Euler-Poincaré 標数の完全性 (定理 5.3.5) から $\chi_V(\mathcal{F}) = \chi_V(\mathcal{I} \otimes \mathcal{F}) + \chi_V(j_*j^*\mathcal{F})$. 最後に, 定理 5.2.1 (2) より $\chi_V(j_*j^*\mathcal{F}) = \chi_Y(j^*\mathcal{F})$ なので結論を得る. □

問題 5.6 ($*$)**.** 上の証明で用いた次の主張を証明せよ: 局所自由層によるテンソル積函手は完全.

以上です.