2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　11 月 01 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

5 層のコホモロジー

今回は層のコホモロジーの一般論の復習と, Riemann-Roch の定理に向けた準備を行う.

5.1 単射的分解とコホモロジー

$X = (X, \mathcal{O}_X)$ を環付き空間とする. $\mathcal{O}_X$ 加群層の射 $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 全体のなす加群を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ と書く.

定義. $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{I}$ が**単射的** (injective) であるとは, $\mathcal{O}_X$ 加群層の任意の完全列 $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{G}$ に対し, 加群の図式

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{I}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(i, \mathcal{I})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \longrightarrow 0$$

が完全になるときをいう.

補題 5.1.1. 任意の $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{F}$ に対し, 単射的 $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{I}$ と $\mathcal{O}_X$ 加群層の単射 $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ がある.

定義. $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{F}$ の**単射的分解** (injective resolution) とは, $\mathcal{O}_X$ 加群層の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \tag{5.1}$$

であって各 $\mathcal{I}^j$ が単射的なもののことである. 単射的分解の $\mathcal{I}^0$ 以降だけを取り出してできる加群層の複体を $\mathcal{I}^\bullet = (\mathcal{I}^m, d^m)_{m=0}^{\infty}$ と書く.

補題 5.1.2. 任意の $\mathcal{O}_X$ 加群層は単射的分解を持つ.

証明. 補題 5.1.1 より単射的な $\mathcal{I}^0$ と単射 $i_0 : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}_0$ がある. 次に $\mathcal{F}_1 := \mathrm{Coker}(i_0)$ に補題 5.1.1 を用いて, 単射的な $\mathcal{I}^1$ と単射 $i_1 : \mathcal{F}_1 \hookrightarrow \mathcal{I}^1$ を得る. これを繰り返して, 各 $j \in \mathbb{N}$ に対し完全列 $0 \to \mathcal{F}_j \xrightarrow{i_j} \mathcal{I}^j \xrightarrow{p_j} \mathcal{F}_{j+1} \to 0$ を得る ($\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}$). そこで $d^j := i_{j+1} \circ p_j : \mathcal{I}^j \to \mathcal{I}^{j+1}$ と定めると, $\mathcal{F}$ の単射的分解 (5.1) が得られる. □

定義. $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$ 加群層とし, U を X の開集合とする. $p \in \mathbb{N}$ に対し, U 上での $\mathcal{F}$ の p 次**コホモロジー群** (cohomology group) を, $\mathcal{O}_X(U)$ 加群

$$H^p(U, \mathcal{F}) := H^p(\Gamma(U, \mathcal{I}^\bullet)) = \mathrm{Ker}\,\Gamma(U, d^p)/\mathrm{Im}\,\Gamma(U, d^{p-1})$$

として定義する. 但し $\Gamma(U, \mathcal{I}^\bullet)$ は加群の複体 $\mathcal{I}^0(U) \xrightarrow{d^0(U)} \mathcal{I}^1(U) \xrightarrow{d^1(U)} \cdots$ のこと.

定理 5.1.3. (1) $H^p(U, \mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ の単射的分解の取り方によらない.

(2) $\mathcal{O}_X$ 加群の射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ に対し $\mathcal{O}_X(U)$ 加群の準同型 $H^p(U, \varphi) : H^p(U, \mathcal{F}) \to H^p(U, \mathcal{G})$ が定まり, $H^p(U, -)$ は $\mathcal{O}_X$ 加群層の圏から $\mathcal{O}_X(U)$ 加群の圏への函手になる.

[*1] 2018/11/07 版, ver. 0.3.

(3) $\mathcal{O}_X$ 加群層の短完全列 $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ に対し，各 $p \in \mathbb{N}$ について，$\mathcal{O}_X(U)$ 準同型 $\delta^p : H^p(U, \mathcal{G}) \to H^{p+1}(U, \mathcal{F})$ が定まって，

$$0 \to H^0(U,\mathcal{E}) \to H^0(U,\mathcal{F}) \to H^0(U,\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(U,\mathcal{E}) \to H^1(U,\mathcal{F}) \to H^1(U,\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^1} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\delta^{p-1}} H^p(U,\mathcal{E}) \to H^p(U,\mathcal{F}) \to H^p(U,\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(U,\mathcal{E}) \to H^{p+1}(U,\mathcal{F}) \to H^{p+1}(U,\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^{p+1}} \cdots$$

が $\mathcal{O}_X(U)$ 加群の完全列になる．これを**コホモロジー (長) 完全列**という．

また，0 次コホモロジーは大域切断の集合と同一視できる．

定理 5.1.4. $\mathcal{O}_X(U)$ 加群として $H^0(U, \mathcal{F}) \simeq \Gamma(U, \mathcal{F})$.

定理 5.1.3 と定理 5.1.4 は，層のコホモロジー函手 $\mathcal{F} \mapsto H^i(X, \mathcal{F})$ が (左完全な) 大域切断函手 $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ の (右) **導来函手** (derived functor) である，つまり

$$H^i(X, -) = R^i\Gamma(X, -)$$

である，という事実から従う．詳しくは [H77, Chap.III, §§1–2] を参照せよ．

アフィンスキーム上の準連接層に対しては次のように高次コホモロジーの消滅定理が成立する．

定理 5.1.5 (Serre, Grothendieck)**.** $\mathcal{F}$ がアフィンスキーム X 上の準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層なら，任意の $p \geq 1$ に対し

$$H^p(X, \mathcal{F}) = 0.$$

$X = \mathrm{Spec}(A)$ で A が Noether 環の場合の証明が [H77, p.215, Theorem 3.5, Chap.III, §3] にある．

5.2 高次順像

前副節の諸概念は相対化できる．

定義. $f : X \to Y$ を環付き空間の射とする．$\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$ 加群層とし，$\mathcal{I}^\bullet = (\mathcal{I}^m, d^m)_{m\geq 0}$ を $\mathcal{F}$ の単射的分解とする．また $f_*(\mathcal{I}^\bullet) = (f_*\mathcal{I}_m, f_*(d^m))_{m\geq 0}$ を順像のなす複体とする．このとき，各 $p \geq 0$ に対し $\mathcal{O}_Y$ 加群層 $R^p f_* \mathcal{F}$ を

$$R^p f_* \mathcal{F} := H^p(f_*(\mathcal{I}^\bullet))$$

で定義し，p 次の**高次順像** (higher direct image) と呼ぶ．

高次順像に対しても，定理 5.1.3 と同様の主張が成立する．詳細は書き下さない．

定理 5.1.5 も相対版がある．まず

定義. スキームの射 $f : X \to Y$ は，全てのアフィン開集合 $U \subset Y$ について $f^{-1}U$ がアフィンスキームであるとき，**アフィン射** (affine morphism) と呼ばれる．

定理 5.2.1. X, Y をスキーム，$f : X \to Y$ をアフィン射とする．また $\mathcal{F}$ を準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層とする．

(1) $p \geq 1$ なら $R^p f_* \mathcal{F} = 0$.

(2) 任意の $p \geq 0$ に対し $H^p(Y, f_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^p(X, \mathcal{F})$.

Leray のスペクトル系列を用いた証明が [飯80, p.126, 定理 4.9] で紹介されている．

5.3 層のコホモロジーの有限性定理と Euler-Poincaré 指標

層の Euler-Poincaré 指標を導入するのがこの副節の目的である. そのために, 層のコホモロジーに関する基本的な結果を幾つか紹介する.

位相空間 X が **Noether 的** (noetherian) であるとは, 任意の閉部分集合列 $Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq \cdots$ に対し, ある $r \in \mathbb{N}$ があって $Y_r = Y_{r+1} = \cdots$ となることであった.

定理 5.3.1 (Grothendieck 消滅定理)**.** X を n 次元 Noether 的空間とし, $\mathcal{F}$ を X 上の加群層とすると[*2]

$$H^p(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall p > n.$$

証明は [H77, p.208, Theorem 2.7, Chap.III, §2] を参照せよ.

問題 5.1 $(*)$**.** Noether 環 A のスペクトラム $\mathrm{Spec}(A)$ は Noether 空間であることを示せ.

次に連接層を導入する.

定義. $(X, \mathcal{O}_X)$ を環付き空間とし, $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$ 加群層とする. 任意の $x \in X$ に対して, 開近傍 $U \ni x$ と有限集合 I, J および $\mathcal{O}_X|_U$ 加群層の完全列

$$\mathcal{O}_X^{\oplus J}|_U \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus I}|_U \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

が存在するとき, $\mathcal{F}$ は**連接** (coherent) であるという.

注意. 準連接層の定義 (定義 2.2.1) と比べると, 集合 I, J が有限であるところが違う.

例. 有限階数の局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群層は連接である.

次の基本的な結果を思い出そう.

定理 5.3.2 (Serre)**.** 連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層と層としての射のなす圏 $\mathcal{C}oh(\mathcal{O}_X)$ は Abel 圏.

さて Euler-Poincaré 指標の導入の準備に戻ろう.

定理 5.3.3 (有限性定理)**.** X を体 k 上の完備代数的スキームとし, $\mathcal{F}$ を連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層とする. このとき任意の $p \in \mathbb{N}$ に対し $H^p(V, \mathcal{F})$ は k 上の有限次元線形空間.

証明は [H77, p.228, Theorem 5.2, Chap.III, §5] を参照のこと. そこでは, Serre による, より一般的な仮定の下での結果が証明されている.

消滅定理 5.3.1 と有限性定理 5.3.3 から次の定義が意味を持つ.

定義 5.3.4. V を体 k 上の完備代数的スキームとし, $\mathcal{F}$ を連接 $\mathcal{O}_V$ 加群層とする.

(1) $\mathcal{F}$ の **Euler-Poincaré 指標** (characteristics) $\chi_V(\mathcal{F})$ を次式で定義する.

$$\chi_V(\mathcal{F}) := \sum_{p \geq 0} (-1)^p \dim_k H^p(V, \mathcal{F}).$$

[*2] ver. 0.2 で訂正しました.

(2) 次式で定まる $p_a(V)$ を V の**算術種数** (arithmetic genus) と呼ぶ.

$$p_a(V) := (-1)^{\dim V}(\chi_V(\mathcal{O}_V) - 1).$$

定理 5.3.5 (Euler-Poincaré 指標の完全性)**.** $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ が $\mathcal{C}oh(\mathcal{O}_V)$ における完全系列である時,

$$\chi_V(\mathcal{E}) - \chi_V(\mathcal{F}) + \chi_V(\mathcal{G}) = 0.$$

問題 5.2 ($*$)**.** コホモロジー長完全列 (定理 5.1.3 (3)) を用いて定理 5.3.5 を証明せよ.

問題 5.3 ($**$)**.** (1) 代数閉体 k 上の整スキーム X に対し $H^0(X, \mathcal{O}_X) \simeq k$ となることを示せ.

(2) 定義 5.3.4 で, 更に k を代数閉体と仮定し, また V を整スキームだと仮定する. このとき V の算術種数は次のように書けることを示せ.

$$p_a(V) = \sum_{i=0}^{\dim V - 1} \dim_k H^{r-i}(V, \mathcal{O}_V).$$

5.4 閉部分スキームの構造完全列

X をスキーム, Y を X の閉部分スキーム, $j : Y \hookrightarrow X$ をその閉埋入, $\mathcal{I}_Y$ を Y の定義イデアル層とする. この時 $j_*\mathcal{O}_Y \simeq \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y$ なので

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow j_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow 0 \tag{5.2}$$

は Abel 圏 $\mathcal{C}oh(\mathcal{O}_X)$ の完全系列である.

定義. 圏 $\mathcal{C}oh(\mathcal{O}_X)$ での完全列 (5.2), もしくは $j_*\mathcal{O}_Y$ を単に $\mathcal{O}_Y$ と書いた,

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

を $Y \subset X$ の**構造完全列** (structure exact sequence) と呼ぶ.

注意. $j_*\mathcal{O}_Y$ を単に $\mathcal{O}_Y$ と書く理由の 1 つは, 定理 5.2.1 (2) より任意の p に対して $H^p(X, j_*\mathcal{O}_Y) = H^p(Y, \mathcal{O}_Y)$ が成り立つからである.

次に, 構造完全列を使って Euler-Poincaré 標数の計算ができる, という内容の命題 5.4.3 を説明したい. その準備として

定義 5.4.1. 環付き空間の射 $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ と $\mathcal{O}_Y$ 加群層 $\mathcal{F}$ に対し,

$$f^*\mathcal{F} := f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

を $\mathcal{F}$ の**逆像** (inverse image) と呼ぶ. 但し f^{-1} は層の引き戻し (定義 2.1.3).

この定義で, $f^{-1}\mathcal{F}$ が $f^{-1}\mathcal{O}_Y$ 加群であること, および X 上の環層の射 $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ が存在すること (次の問題 5.4 を参照) を用いた.

問題 5.4 ($**$ (f^{-1}, f_*) の随伴性, [H77, p.68 Exercise 1.18, Chap.II, §1])**.** $f : X \to Y$ を位相空間の連続写像とする. 以下の主張を示せ.

(1) X 上の任意の (集合の) 層 $\mathcal{F}$ に対し, 自然な射 $f^{-1}f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ が存在する.

(2) Y 上の任意の層 $\mathcal{E}$ に対し, 自然な射 $\mathcal{E} \to f_*f^{-1}\mathcal{F}$ が存在する.

(3) X 上の任意の層 $\mathcal{F}$ と Y 上の任意の層 $\mathcal{E}$ について, 自然な全単射

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, f_*\mathcal{F})$$

が存在する. 但し Hom は層の射の集合を表す.

補題 5.4.2 (射影公式 (projection formula)). 環付き空間の射 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ と $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{E}$ および有限階数の局所自由 $\mathcal{O}_Y$ 加群層 $\mathcal{F}$ に対して, 次の自然な準同型 (注意 1.6.3 を参照) が存在する.

$$f_*(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{F}) \simeq f_*(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F}.$$

問題 5.5 ($*$ [H77, p.123, Exercise 5.1, Chap.II, §5]). 補題 5.4.2 を証明せよ.

命題 5.4.3. V を体 k 上の完備代数的スキーム, $\mathcal{F}$ を有限生成局所自由 $\mathcal{O}_V$ 加群層とする. また Y を V の閉部分スキームとする. この時

$$\chi_V(\mathcal{F}) = \chi_V(\mathcal{I}_Y \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{F}) + \chi_Y(j^*\mathcal{F}).$$

但し $\mathcal{I}_Y$ は $Y \subset V$ の定義イデアル層であり, また $j : Y \hookrightarrow V$ は閉埋入.

証明. テンソルの記号を $\otimes := \otimes_{\mathcal{O}_V}$ と簡略化する. 閉部分スキーム $Y \subset V$ の構造完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_V \longrightarrow j_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

に $\mathcal{F}$ をテンソル積すると, 局所自由層によるテンソル積函手は完全 (問題 5.6 参照) なので,

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow (j_*\mathcal{O}_Y) \otimes \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

が完全列となる. また射影公式 (補題 5.4.2) から

$$(j_*\mathcal{O}_Y) \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} j_*(j^*\mathcal{F}).$$

よって完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow j_*j^*\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

を得る. $\mathcal{F} \in \mathcal{C}oh(\mathcal{O}_X)$ より $j^*\mathcal{F} \in \mathcal{C}oh(\mathcal{O}_Y)$ となり, 従って $j_*j^*\mathcal{F} \in \mathcal{C}oh(\mathcal{O}_X)$ となる. よって Euler-Poincaré 標数の完全性 (定理 5.3.5) から

$$\chi_V(\mathcal{F}) = \chi_V(\mathcal{I} \otimes \mathcal{F}) + \chi_V(j_*j^*\mathcal{F}).$$

最後に, 定理 5.2.1 (2) より $\chi_V(j_*j^*\mathcal{F}) = \chi_Y(j^*\mathcal{F})$ なので結論を得る. □

問題 5.6 ($*$). 上の証明で用いた次の主張を証明せよ: 局所自由層によるテンソル積函手は完全.

5.5 Riemann-Roch の定理に向けて

この副節は代数曲線の Riemann-Roch の定理の準備が目標である. まず非特異性の概念の復習から始める.

定義. X をスキームとする.

(1) $x \in X$ は, その局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ が正則局所 (Noether) 環 (定義 3.3.2) であるとき, **非特異点** (non-singular point) と呼ばれる. 非特異点でない x を**特異点** (singular point) と呼ぶ.

(2) 全ての $x \in X$ が非特異点である X を**非特異**もしくは**正則** (regular)*3 と呼ぶ.

以下の有名な事実を思い出しておく. 証明は [松80, §14, Theorem 14.3, §9 Example 1] を参照せよ.

定理 5.5.1. 正則局所環は一意分解整域であり, 従って Noether 整閉整域である.

次に非特異代数多様体の因子に関して基本事実をまとめておく.

補題 5.5.2. X を体 k 上の非特異代数多様体とする.
(1) X は正規スキーム. 特に X 上の Weil 因子が意味を持つ (§3.2).
(2) X 上の Weil 因子と Cartier 因子は一致する.

証明. (1) は定理 5.5.1 の後半より従う. (2) については, 定理 5.5.1 の前半より正則局所環は一意分解整域なので, 定理 3.5.2 が適用できる. □

さて本題に戻ろう.

定義. 1 次元代数多様体のことを**代数曲線**と呼ぶ.

以下 C を体 k 上の非特異完備代数曲線とする.
C の余次元 1 の既約閉集合 P は閉点である. これを今後 "閉点 $P \in C$" と書く. D を C の因子とすると, 補題 5.5.2 より, 有限集合 I および各 $i \in I$ に対し閉点 $P_i \in C$ と $m_i \in \mathbb{Z}$ があって $D = \sum_{i \in I} m_i P_i$ と書ける.

定義 5.5.3. C の因子 $D = \sum_{i \in I} m_i P_i$ に対し

$$\deg D \;:=\; \textstyle\sum_{i \in I} m_i \deg P_i, \quad \deg P_i \;:=\; [k(P_i) : k].$$

但し $k(P_i)$ は P_i での局所環の剰余体.

C の因子 D に対し可逆層 $\mathcal{O}_C(D)$ を構成した (定義 3.6.1) ことを思い出しておく.

定理 5.5.4.

$$\chi_C(\mathcal{O}_C(D)) \;=\; \chi_C(\mathcal{O}_C) + \deg D.$$

証明. 閉点 $P \in C$ のイデアル層は $\mathcal{I}_P = \mathcal{O}_C(-P)$ となる. よって, 命題 5.4.3 を $(Y \subset X, \mathcal{F}) = (P \in C, \mathcal{O}_C(D))$ に適用すると

$$\chi_C(\mathcal{O}_C(D)) \;=\; \chi_C(\mathcal{O}_C(-P) \otimes \mathcal{O}_C(D)) + \chi_P(j^* \mathcal{O}_C(D)). \tag{5.3}$$

但し $j : P \hookrightarrow C$ は閉埋入. ここで点 P 上の可逆層は自明なもの $\mathcal{O}_P$ しかないから $j^*\mathcal{O}_C(D) \simeq \mathcal{O}_P$. P が 0 次元であることと $\mathcal{O}_P \simeq \mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_P = k(P)$ より

$$\chi_P(j^*\mathcal{O}_C(D)) \;=\; \chi_P(\mathcal{O}_P) \;=\; \dim_k H^0(P, \mathcal{O}) \;=\; \dim_k k(P) \;=\; [k(P) : k] \;=\; \deg P.$$

ここで $D = \sum_{i=1}^r m_i P_i$ と書き, また今までの議論で $P = P_1$ とすると, (5.3) は

$$\chi_C(\mathcal{O}_C(m_1 P_1 + \cdots + m_r P_r)) \;=\; \chi_C(\mathcal{O}_C((m_1 - 1)P_1 + \cdots + m_r P_r)) + [k(P) : k].$$

*3 正規 (normal) とは別の概念です.

この等式を繰り返し用いて

$$\chi_C(\mathcal{O}_C(m_1P_1+\cdots+m_rP_r)) \;=\; \cdots \;=\; \chi_C(\mathcal{O}_C(0))+\textstyle\sum_{i=1}^{r} m_i \deg P_i \;=\; \chi_C(\mathcal{O}_C)+\deg D.$$

□

系 5.5.5. k が代数閉体なら[*4], C の因子 $D=\sum_{i\in I} m_iP_i$ に対して

$$l(D) \;=\; i(D)+1-g+\textstyle\sum_{i\in I} m_i.$$

但し $l(D):=\dim H^0(C,\mathcal{O}_C(D))$, $i(D):=\dim H^1(C,\mathcal{O}_C(D))$, $g:=i(0)=\dim H^1(C,\mathcal{O}_C)$.

注意. 系 5.5.5 を代数曲線の **Riemann-Roch の定理**と呼ぶ. 次節で導入する微分形式を用いると $l(K-D)$ は幾何学的な意味を持つ.

参考文献

[H77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer, 1977;
高橋宣能, 松下大介訳, **代数幾何学 1,2,3**, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2008.

[飯80] 飯高茂, **代数幾何学 I**, 岩波基礎数学講座, 岩波書店, 1976.

[松80] 松村英之, **可換環論**, 共立出版, 1980.

以上です.

[*4] ver. 0.3 で修正しました.