2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　10 月 18 日分レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

4　射影スキーム

4.1　次数付き環と斉次スペクトル

定義. R を環とする. **次数付き R 代数** A とは, R 代数であって, R 加群としての直和分解 $A = \oplus_{d=0}^{\infty} A_d$ があり, 環構造について $A_d \cdot A_e \in A_{d+e}$ を満たすもののことである.

各 $d \in \mathbb{N}$ について, A_d を A の d 次**斉次部分** と呼び, A_d の元を**斉次元** と呼ぶ. また, 元 $a \in A$ の d **次斉次部分**とは, 自然な射影 $\pi_d : A \to A_d$ による像 $\pi_d(a) \in A_d$ のことである.

次数付き $\mathbb{Z}$ 代数のことを**次数付き環** と呼ぶ.

定義. R を環とし, A を次数付き R 代数とする. A 加群 M は R 加群としての直和分解 $M = \oplus_{n=-\infty}^{\infty} M_n$ があり, A 加群構造について $A_d.M_n \subset M_{d+n}$ となるとき, **次数付き A 加群** と呼ばれる.

定義. R を環とし, A を次数付き R 代数, M と N を次数付き A 加群とする.

(1) $l \in \mathbb{Z}$ に対し, 次数付き A 加群 $M(l)$ を, R 加群として $M(l)_n := M_{l+n}$ とし, A 加群構造は M のものを使うことで定義する. $M(l)$ を**次数の l シフト** (shift) と呼ぶ.

(2) A 加群のテンソル積 $M \otimes_A N$ は次のようにして次数付き A 加群とみなせる.

$$(M \otimes_A N)_n := \{\textstyle\sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_{r-i} \mid x_i \in M_i,\ y_j \in N_j\}.$$

これを次数付き A 加群 M と N の**テンソル積**と呼び, 同じ記号 $M \otimes_A N$ で表す.

(3) 次数付き A 加群 $\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(M,N)$ を次のように定める.

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(M,N) &:= \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(M,N)_n,\\ \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(M,N)_n &:= \{\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M,N) \mid \varphi(M_m) \subset N_{m+n}\ \forall m \in \mathbb{Z}\},\end{aligned}$$

特に $l \in \mathbb{Z}$ に対して次数付き A 加群 $A(l)$ が定義できる.

補題 4.1.1. A を次数付き環, M と N を次数付き A 加群として,

$$M(l_1) \otimes_A N(l_2) \simeq (M \otimes_A N)(l_1 + l_2), \quad \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(M(l_1), N(l_2)) = \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(M,N)(l_2 - l_1).$$

また $\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(A(l), A) \simeq A(-l)$ である.

問題 4.1 $(*)$**.** 補題 4.1.1 を示せ.

定義. A を次数付き環とする.

(1) A の斉次イデアル A_+ を $A_+ := \oplus_{n\geq 1} A_n$ と定義する.

[*1] 2018/10/11 版, ver. 0.1.

(2) A の**斉次スペクトル** (homogeneous spectrum) $\mathrm{Proj}(A)$ を, $\mathrm{Spec}(A)$ の部分集合

$$\mathrm{Proj}(A) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid A_+ \text{ を含まない斉次素イデアル}\}$$

に, $\mathrm{Spec}(A)$ の Zariski 位相の相対位相をいれたものとして定義する.

(3) 斉次元 $f \in A$ に対し $D_+(f) := D(f) \cap \mathrm{Proj}(A)$ と書き, 斉次イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ に対し $V_+(\mathfrak{a}) := V(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{Proj}(A)$ と書く.

4.2 射影スキーム

この副節では環 R を固定し, A と書いたら次数付き R 代数のこととする.

定義. 次数付き R 代数 A は次の 3 条件を満たすとき, R 上**有限生成**であると呼ぶ.

(i) $A_0 = R$.　(ii) A_1 は R 加群として有限生成.　(iii) $n > 0$ なら $A_n \cdot A_1 = A_{n+1}$.

注意 4.2.1. 条件 (ii) より $a_0, \dots, a_r$ があって $A_1 = Ra_0 + \cdots + Ra_r$. 更に条件 (iii) を使うと, A_d の各元は a_i 達の d 次斉次多項式で書ける. つまり写像

$$R[x_0, \dots, x_r] \longrightarrow A, \quad x_i \longmapsto a_i$$

は全射環準同型であって次数を保つ.

補題 4.2.2. 注意 4.2.1 の記号のもと, $\mathrm{Proj}(A) = D_+(a_0) \cup \cdots \cup D_+(a_r)$.

補題 4.2.3. 斉次元 $a \in A_d$ に対し, A の $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ による局所化を $A[1/a]$ と書く. その部分環 $A_{[a]}$ を

$$A_{[a]} := \textstyle\sum_{n \geq 0} A_{dn} \cdot 1/a^n \subset A[1/a] \tag{4.1}$$

と定義する. このとき, 写像 ψ_a を

$$\psi_a : D_+(a) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A_{[a]}), \quad \mathfrak{p} \longmapsto A_{[a]} \cap \mathfrak{p}A[1/a]$$

で定義できて, さらに ψ_a は同相写像である.

証明. well-defined であることは, $\mathfrak{p} \in D_+(a)$ なら $\mathfrak{p}A[1/a]$ が斉次素イデアルであることから従う.

ψ_a の連続性について. $b \in A_{dn}$ に対して $b/a^n \in \psi_a(\mathfrak{p}) \iff b \in \mathfrak{p}$ だから, これを言い換えて $\psi_a^{-1} D(b/a^n) = D_+(v) \cap D_+(a)$. よって連続.

単射性について. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in D_+(a)$ が異なれば, ある n と $b \in \mathfrak{p}_1 \cap A_n$ が存在して $b \notin \mathfrak{p}_2$ となるから, $b^d/a^n \in \psi_a(\mathfrak{p}_1) \setminus \psi_a(\mathfrak{p}_2)$.

全射であること. $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}\, A_{[a]}$ とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathfrak{p}_n := \{b \in A_n \mid b^d/a^n \in \mathfrak{p}'\}$ と定めると, $\mathfrak{p} := \oplus_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{p}_n$ は素イデアル. $\mathfrak{p}$ は斉次イデアルで A_+ を含まないから, $\mathfrak{p} \in D_+(a)$. また $\mathfrak{p}_n$ の定義から $\psi_a \mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$. □

問題 4.2 (∗)**.** 全射性の証明中の "$\mathfrak{p}$ は素イデアル" を示せ.

問題 4.3 (∗)**.** A を有限生成次数付き環とする. 補題 4.2.2 と補題 4.2.3 を用いて次の主張を示せ.

$$\mathrm{Proj}(A) = \emptyset \iff \text{ある } n_0 \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ が存在して}, d > n_0 \text{ なら } A_d = 0.$$

以上です.