2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　10 月 25 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

4　射影スキーム

今回は射影性と固有性の復習をする.

4.1　次数付き環と斉次スペクトル

この講義では, 次数付きの環といったら $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ に次数を持つものとする. 正確には,

定義. R を環とする. **次数付き R 代数** (graded R-algebra) A とは, R 代数であって, R 加群としての直和分解 $A = \oplus_{d=0}^{\infty} A_d$ があり, 環構造について $A_d \cdot A_e \in A_{d+e}$ を満たすもののことである.

各 $d \in \mathbb{N}$ について, A_d を A の d 次**斉次部分** (graded component) と呼び, A_d の元を**斉次元** (homogeneous element) と呼ぶ. また, 元 $a \in A$ の d **次斉次部分**とは, 自然な射影 (全射 R 加群準同型) $\pi_d : A \to A_d$ による像 $\pi_d(a) \in A_d$ のことである.

次数付き $\mathbb{Z}$ 代数のことを**次数付き環** (graded ring) と呼ぶ.

次数付き環 A 上の次数付き加群は $\mathbb{Z}$ に次数を持つものとする. つまり,

定義. R を環とし, A を次数付き R 代数とする. A 加群 M は R 加群としての直和分解 $M = \oplus_{n=-\infty}^{\infty} M_n$ があり, A 加群構造について $A_d.M_n \subset M_{d+n}$ となるとき, **次数付き A 加群** (graded A-module) と呼ばれる.

A 自身を次数付き A 加群とみなせることに注意する.

次数付き加群に対する操作を幾つか導入する.

定義. R を環とし, A を次数付き R 代数, M と N を次数付き A 加群とする.

(1) $l \in \mathbb{Z}$ に対し, 次数付き A 加群 $M(l)$ を, R 加群として $M(l)_n := M_{l+n}$ とし, A 加群構造は M のものを使うことで定義する. $M(l)$ を**次数の l シフト** (shift) と呼ぶ.

(2) A 加群のテンソル積 $M \otimes_A N$ は次のようにして次数付き A 加群とみなせる.

$$(M \otimes_A N)_n := \{\textstyle\sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_{r-i} \mid x_i \in M_i,\ y_j \in N_j\}.$$

これを次数付き A 加群 M と N の**テンソル積**と呼び, 同じ記号 $M \otimes_A N$ で表す.

(3) 次数付き A 加群 $\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(M, N)$ を次のように定める.

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(M, N) &:= \oplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(M, N)_n, \\ \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(M, N)_n &:= \{\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M, N) \mid \varphi(M_m) \subset N_{m+n}\ \forall m \in \mathbb{Z}\},\end{aligned}$$

特に $l \in \mathbb{Z}$ に対して次数付き A 加群 $A(l)$ が定義できる.

[*1] 2018/08/20 版, ver. 0.2.

補題 4.1.1. A を次数付き環, M と N を次数付き A 加群として,

$$M(l_1) \otimes_A N(l_2) \simeq (M \otimes_A N)(l_1 + l_2), \quad \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(M(l_1), N(l_2)) = \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(M, N)(l_2 - l_1).$$

また $\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(A(l), A) \simeq A(-l)$ である.

問題 4.1 $(*)$**.** 補題 4.1.1 を示せ.

環のスペクトルを素イデアルの集合で定義したのと同様に, 次数付き環のスペクトルが定義できる. 但し, イデアルとして次数構造を保つものだけを考える. つまり, つぎのようなイデアルを考える.

定義. A を次数付き環とする. 環 A のイデアル I は, 次数付き加群としての A の次数付き部分加群のとき, **斉次** (homogeneous) であるという.

言い換えると, 斉次イデアル I は任意の $a \in I$ の各斉次部分 a_d が再び I に含まれるような A のイデアルのことである.

定義. A を次数付き環とする.

(1) A の斉次イデアル A_+ を $A_+ := \oplus_{n \geq 1} A_n$ と定義する.

(2) A の**斉次スペクトル** (homogeneous spectrum) $\mathrm{Proj}(A)$ を, $\mathrm{Spec}(A)$ の部分集合

$$\mathrm{Proj}(A) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid A_+ \text{ を含まない斉次素イデアル }\}$$

に, $\mathrm{Spec}(A)$ の Zariski 位相の相対位相をいれたものとして定義する.

(3) 斉次元 $f \in A$ に対し $D_+(f) := D(f) \cap \mathrm{Proj}(A)$ と書き, 斉次イデアル $\mathfrak{a} \subset A$ に対し $V_+(\mathfrak{a}) := V(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{Proj}(A)$ と書く.

4.2 射影スキーム

この副節では環 R を固定し, A と書いたら次数付き R 代数のこととする.

定義. 次数付き R 代数 A は次の 3 条件を満たすとき, R 上**有限生成**であると呼ぶ.

(i) $A_0 = R$.　(ii) A_1 は R 加群として有限生成.　(iii) $n > 0$ なら $A_n \cdot A_1 = A_{n+1}$.

注意 4.2.1. 条件 (ii) より $a_0, \ldots, a_r$ があって $A_1 = Ra_0 + \cdots + Ra_r$. 更に条件 (iii) を使うと, A_d の各元は a_i 達の d 次斉次多項式で書ける. つまり写像

$$R[x_0, \ldots, x_r] \longrightarrow A, \quad x_i \longmapsto a_i$$

は全射環準同型であって次数を保つ.

補題 4.2.2. 注意 4.2.1 の記号のもと, $\mathrm{Proj}(A) = D_+(a_0) \cup \cdots \cup D_+(a_r)$.

証明. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}(A)$ をとると, $\mathfrak{p} \not\supset A_+$ より, ある $a \in A_d$, $d > 0$ が存在して $a \notin \mathfrak{p}$. つまり $D_+(a) \in \mathfrak{p}$. $a = \sum_{J=(j_0,\ldots,j_r)} c_J a_0^{j_0} \cdots a_r^{j_r}$, $|J| = \sum_{i=0}^{r} j_i = d > 0$ とかけるので, ある i が存在して $\mathfrak{p} \in D_+(a_i)$. $\square$

補題 4.2.3. 斉次元 $a \in A_d$ に対し, A の $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ による局所化を $A[1/a]$ と書く. その部分環 $A_{[a]}$ を

$$A_{[a]} := \textstyle\sum_{n\geq 0} A_{dn} \cdot 1/a^n \subset A[1/a] \tag{4.1}$$

と定義する. このとき, 写像 ψ_a を

$$\psi_a : D_+(a) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A_{[a]}), \quad \mathfrak{p} \longmapsto A_{[a]} \cap \mathfrak{p}A[1/a]$$

で定義できて, さらに ψ_a は同相写像である.

証明. well-defined であることは, $\mathfrak{p} \in D_+(a)$ なら $\mathfrak{p}A[1/a]$ が斉次素イデアルであることから従う.

ψ_a の連続性について. $b \in A_{dn}$ に対して $b/a^n \in \psi_a(\mathfrak{p}) \iff b \in \mathfrak{p}$ だから, これを言い換えて $\psi_a^{-1} D(b/a^n) = D_+(v) \cap D_+(a)$. よって連続.

単射性について. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in D_+(a)$ が異なれば, ある n と $b \in \mathfrak{p}_1 \cap A_n$ が存在して $b \notin \mathfrak{p}_2$ となるから, $b^d/a^n \in \psi_a(\mathfrak{p}_1) \setminus \psi_a(\mathfrak{p}_2)$.

全射であること. $\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec}\, A_{[a]}$ とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathfrak{p}_n := \{b \in A_n \mid b^d/a^n \in \mathfrak{p}'\}$ と定めると, $\mathfrak{p} := \oplus_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{p}_n$ は素イデアル. $\mathfrak{p}$ は斉次イデアルで A_+ を含まないから, $\mathfrak{p} \in D_+(a)$. また $\mathfrak{p}_n$ の定義から $\psi_a \mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$. □

問題 4.2 (∗). 全射性の証明中の "$\mathfrak{p}$ は素イデアル" を示せ.

問題 4.3 (∗). A を有限生成次数付き環とする. 補題 4.2.2 と補題 4.2.3 を用いて次の主張を示せ.

$$\mathrm{Proj}(A) = \emptyset \iff \text{ある } n_0 \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ が存在して}, d > n_0 \text{ なら } A_d = 0.$$

命題 4.2.4. A を次数付き環とする. 位相空間 $X = \mathrm{Proj}(A)$ 上の環層 $\mathcal{O}_X$ であって

$$\mathcal{O}_X|_{D_+(a)} = \widetilde{A}_{[a]}$$

となり, $(X, \mathcal{O}_X)$ がスキームであるものが存在する.

証明. $\mathrm{Proj}(A) = \cup_{d=1}^{\infty} \cup_{a \in A_d} D_+(a)$ と開被覆を取る. これに対応して, (4.1) の $A_{[a]}$ を用いて, アフィンスキーム $X_a := \mathrm{Spec}\, A_{[a]}$ を考える. $a \in A_d$, $b \in A_e$ に対しては $X_{a,b} := D(b^d/a^e) \subset X_a$ と定義する.

ここで同型写像

$$A_{[ab]} \xrightarrow{\sim} A_{[b]}[b^d/a^e], \quad \frac{c}{(ab)^n} \longmapsto \frac{ca^{n-el}}{b^{n+dl}} \left(\frac{b^d}{a^e}\right)^l$$

が well-defined であることに注意すると, スキームとしての同型射

$$\xi_{a,b} : X_{a,b} = D(b^d/a^e) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(A_{[ab]})$$

が得られる. 同様に $A_{[ab]} \xrightarrow{\sim} A_{[b]}[a^e/b^d]$ を用いて $\xi_{b,a}$ を定め, $\eta_{ab} := \xi_{ba}^{-1}\xi_{ab}$ とすると,

(i) $\eta_{aa} = \mathrm{id}$,

(ii) $\eta_{ab}\eta_{ba} = \mathrm{id}$,

(iii) $\eta_{ab}\eta_{bc} = \eta_{a,c}$

が成立する. 従って X_a 達は貼り合わさってスキーム $(X, \mathcal{O}_X)$ が得られる. 構成の仕方から $\mathcal{O}_X \,|\, X_a = \mathcal{O}_{X_a} = \widetilde{A}_{[a]}$ である. □

定義. (1) 命題 4.2.4 のスキーム $(\mathrm{Proj}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(A)})$ を A の**定める射影スキーム** (projective scheme of A) とよび, 単に $\mathrm{Proj}(A)$ と書く.

(2) S を R 代数とする. 多項式環 $S[x_0, \dots, x_n]$ の定める射影スキーム $\mathrm{Proj}(S[x_0, \dots, x_n])$ を S 上の n **次元射影空間** (projective space) と呼び, $\mathbb{P}^n_S$ と書く.

命題 4.2.5. A を次数付き R 代数とする.

(1) $\mathrm{Proj}(A)$ は $\mathbb{Z}$ 上分離的で, 特に R 上分離的.

(2) A の冪零根基 $\sqrt{(0)}$ に対し $\sqrt{(0)}_+ := A_+ \cap \sqrt{(0)}$ と定めると $\mathrm{Proj}(A/\sqrt{(0)}_+) \simeq (\mathrm{Proj}(A))_{\mathrm{red}}$.

証明の前に分離性と基底変換について復習しておく.

定義 4.2.6. S をスキームとし, $f : X \to S$ と $g : T \to S$ をスキームの射とする. S 上のファイバー積 $X_T := X \times_S T$ は射 $p_T : X_T \to T$ でもって T 上のスキームとみなせる. この T 上のスキーム X_T を, S 上のスキーム X の T 上への**基底変換** (base change) と呼ぶ.

同じ状況で, 射 $p_T : X_T \to T$ のことを f の g による基底変換ともいう.

$$\begin{tikzcd} X_T \arrow[r] \arrow[d, "p_T"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

分離性は基底変換の下で良く振る舞う.

命題 4.2.7. 分離的なスキームの射 $f : X \to Y$ の任意の射 $h : Y' \to Y$ による基底変換 $f' : X' = X \times_Y Y' \to Y'$ は分離的.

証明は [H77, p.99, Corollary 4.6 (c) Chap.II §4] を参照せよ.

命題 4.2.5 の証明. (1) $X := \mathrm{Proj}(A)$ とし, 対角射 $\Delta_{X/\mathbb{Z}} : X \to X \times_{\mathbb{Z}} X$ を $\Delta : X \to X \times X$ と略記する. $\mathrm{Proj}(A) = \cup_a D_+(a)$ から $\Delta(X) = \cup_a \Delta(D_+(a)) \subset \cup_{a,b} D_+(a) \times D_+(b)$. ここで $A_{[a]} \otimes_{\mathbb{Z}} A_{[b]} \to A_{ab}$ は全射なので, 対応して閉埋入 $j_{ab} : D_+(ab) \hookrightarrow D_+(a) \times D_+(b)$ が存在する. $j_{ab}(D_+(ab)) = \Delta(D_+(ab))$ なので $\Delta(X) = \cup_{a,b} \Delta(D_+(a,b))$ は $X \times X$ の閉部分集合. よって $\mathbb{Z}$ 上分離的. R 上分離的であることは命題 4.2.7 から従う.

(2) $\sqrt{(0)}_+$ は斉次イデアルなので $\mathrm{Proj}(A/\sqrt{(0)}_+)$ が意味を持つことに注意する. $A' := A/\sqrt{(0)}_+$ と書く. 自然な射影 $\pi : A \twoheadrightarrow A'$ における斉次元 $a \in A_d$ の像を a' と書く. $b'/(a')^k \in (A')_{[a']}$ が冪零元だと仮定する. このとき $b^l a^m \in \sqrt{(0)}_+$ なる $l, m \in \mathbb{N}$ がある. よって $b^{pl} a^{pm} = 0$ となる $p \in \mathbb{N}$ がある. 従って $b'/(a')^k = 0$. つまり $\mathrm{Spec}(A')_{a'}$ は被約. また $x/a^k \in \mathrm{Ker}\,\pi$ に対して, ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して $xa^p \in \sqrt{(0)}_+$ となるから, $A_{[a]}$ において x は冪零. 以上より主張が示せた.

□

4.3 固有射と射影的射

位相空間の固有写像とは, 任意のコンパクト集合の逆像がコンパクトになる連続写像のことであった. その代数幾何学的な対応物が固有射の概念であるが, 位相空間の場合に比べてより精緻な定義になっている.

固有射は次のように定義される.

定義. $f : X \to Y$ をスキームの射とする.

(1) f が**閉** (closed) であるとは, 連続写像として閉写像であること, つまり任意の閉集合の f による像が閉であることをいう.

(2) f が**絶対閉** (universally closed) であるとは, 任意のスキームの射 $Y' \to Y$ に関する f の基底変換 $f' : X' \to Y'$ が閉であることをいう.

(3) f は分離的, 有限型かつ絶対閉であるとき**固有的** (proper) であるという.
f が固有射のとき, X を Y 上固有なスキームと呼ぶ.

分離射と同様に固有射も基底変換に関して良く振る舞う.

命題. スキームの固有射 $f : X \to Y$ の任意の射 $h : Y' \to Y$ による基底変換 $f' : X' = X \times_Y Y' \to Y'$ は固有射である.

証明は [H77, p.102, Corollary 4.8, Chap.II, §4] を参照せよ.
固有射は次の概念の定義にも用いられる.

定義. 体 k 上の固有なスキームを k 上の**完備スキーム** (complete scheme) と呼ぶ.

次に射影的射の定義を思い出そう.

定義. $f; X \to Y$ をスキームの射とする.

(1) $\mathbb{P}^n_Y := \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} Y$ を **Y 上の n 次元射影空間**と呼ぶ. 射影 $\mathbb{P}^n_Y \to Y$ を π_Y と書く.

(2) f が**射影的** (projective) であるとは, ある $n \in \mathbb{N}$ と閉埋入 $i : X \to \mathbb{P}^n_Y$ が存在して $f = \pi_Y \circ i$ となることをいう.

(3) f が**準射影的** (quasi-projective) であるとは, ある開埋入 $j : X \to X'$ と射影的射 $g : X' \to Y$ が存在して $f = g \circ j$ となることをいう.

次の定理は, スキームの固有射が冒頭に述べた位相空間の固有写像の良い類似になっていることを主張するものである.

定理. Noether スキームの射影的射は固有的.

証明は [H77, p.102, Corollary 4.8, Chap.II, §4] を参照せよ.
完備スキームと射影スキームを関連付けるのが次に述べる **Chow の補題**である.

定理 4.3.1 (Chow の補題). 体 k 上の代数的完備スキーム X に対し, k 上代数的射影スキーム Y と双有理写像 $f : X \dashrightarrow Y$ が存在する.

証明は [H77, p.107, Exercise 4.10, Chap.II, §4] または [飯80, p.112, 定理 3.2] を参照せよ.
双有理写像の定義を書いておこう.

定義 4.3.2. X と Y をスキームとする.

(1) X の稠密開集合 U とスキームの射 $\varphi : U \to Y$ の組 (U, φ) の, 同値関係

$$(U, \varphi) \sim (V, \psi) \iff \text{ある稠密開集合 } W \cup U \cap V \text{ が存在して } \varphi \,|\, W = \psi \,|\, W$$

による同値類 $[(U, \varphi)]$ を X から Y への**有理写像** (rational map) という.

(2) 有理写像としての逆写像を持つ有理写像を**双有理写像** (birational map) という．また双有理写像 $X \dashrightarrow Y$ が存在するとき, X と Y は**双有理同値**であるという．

参考文献

[H77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer, 1977;
高橋宣能, 松下大介訳, **代数幾何学 1,2,3**, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2008.

[飯80] 飯高茂, **代数幾何学 I**, 岩波基礎数学講座, 岩波書店, 1976.

以上です．