2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　10 月 18 日分レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

3　因子

問題 3.0 ($*$–$***$)**.** [*2] 講義で省略した主張の証明を与えよ. また, 講義で省略した概念の定義 (例えば帰納極限の定義) を与えよ.

3.1　正規スキーム

問題 3.1 ($*$)**.** (p, q) を互いに素な正の整数の組とする. また k を体とし, $A = k[t^p, t^q]$ (t は k 上超越元) とする. この時, A の商体は $k(t)$ で, そこでの A の整閉包は $k[t]$ になることを示せ. つまりこの場合の A は整閉ではない.

補題 3.1.5. 整閉整域 A の局所化 $S^{-1}A$ はまた整閉整域である.

問題 3.2 ($*$)**.** 補題 3.1.5 を証明せよ.

3.3　Noether 整閉整域と因子

問題 3.3 ($**$)**.** Noether 局所環 A の Zariski 接空間は有限次元で, その次元は $\dim A$ 以上であることを導け. (中山の補題と Krull の標高定理を用いる.)

3.5　Cartier 因子

問題 3.4 ($*$ 大域切断函手の左完全性)**.** X を位相空間とする. 大域切断函手 $\Gamma(X, -)$ は左完全であることを示せ. つまり,

$$0 \xrightarrow{f_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{f_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{f_2} \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0$$

を X 上の加群層の短完全列とすると,

$$0 \xrightarrow{\Gamma(X, f_0)} \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\Gamma(X, f_1)} \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\Gamma(X, f_2)} \Gamma(X, \mathcal{F}_3)$$

が完全列であることを示せ.

[*1] 2018/09/23 版, ver. 0.1.

[*2] 問題番号の後に $*$ がいくつか書いてありますが, これは難易度または量の目安です. $*$ 1 つあたり 3–5 点で採点する予定です.

3.6 可逆層と Cartier 因子

命題 3.6.2. D, D_1, D_2 をスキーム X の Cartier 因子とする.

(1) $\mathcal{O}_X(D)$ は X 上の可逆層.

(2) 写像 $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ により X 上の Cartier 因子と $\mathcal{K}_X$ の可逆部分層は 1 対 1 対応する.

(3) $\mathcal{O}_X$ 加群層として $\mathcal{O}_X(D_1 - D_2) \simeq \mathcal{O}_X(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D_2)^{-1}$. 特に $\mathcal{O}_X(-D) \simeq \mathcal{O}_X(D)^{-1}$.

(4) $D_1 \simeq D_2 \iff \mathcal{O}_X$ 加群層として $\mathcal{O}_X(D_1) \simeq \mathcal{O}_X(D_2)$.

問題 3.5 $(**)$**.** 命題 3.6.2 を示せ.

以上です.