2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　10 月 18 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

3　因子

今回は因子の復習として, Weil 因子と Cartier 因子の定義を思い出す．Weil 因子は正規スキーム上で意味を意味を持つものなので, 正規性の復習から始める．また Cartier 因子と可逆層の関係にも触れる．

3.1　正規スキーム

定義 3.1.1. B を環とし, A を B の部分環とする．

(1) $b \in B$ が A 上**整** (integral) とは, ある $a_1, \ldots, a_m \in A$ があって $b^m + a_1 b^{m-1} + \cdots + a_m = 0$ を満たすことをいう．

(2) A 上整な B の元全体を A'_B と書き[*2], A の B での**整閉包** (integral closure) と呼ぶ．

命題 3.1.2. A, B, A'_B を定義 3.1.1 と同様のものとする．

(1) A'_B は B の部分環である．

(2) A'_B 上整な B の元全体は A'_B と一致する．

まず次の補題が行列式を用いて証明できることを思い出そう．

補題 3.1.3. A を環, C を A 代数とする．C が A 加群として有限生成なら, C の任意の元は A 上整．

証明. A 加群として $C = \sum_{i=1}^m A c_i$ となる生成元 $c_1, \ldots, c_m \in C$ を取る．任意の $c \in C$ を 1 つ取って固定する．各 $i = 1, \ldots, m$ について, $c c_i = \sum_{i=1}^m a_{ij} c_j$ となる $a_{ij} \in A$ が取れる．これから連立方程式 $(cE_m - (a_{ij})_{i,j=1}^m) \cdot {}^t(c_1, \ldots, c_m) = 0$ が得られる (E_m は m 次単位行列)．$cE_m - (a_{ij})$ の余因子行列を左から掛けることで, $\det(cE_m - (a_{ij})) = 0$ を得る．この行列式を展開すると, c が A 上整であることが分かる．$\square$

命題 3.1.2 の証明. $b, \ldots, b' \in B$ と A が生成する B の部分環を $A[b, \ldots, b']$ と書く．$b \in B$ が A 上整なら $A[b] = \sum_{i=0}^r A b^i$ となる $r \in \mathbb{N}$ があり[*3], 更に $c \in B$ が $A[b]$ 上整なら $A[b, c] = \sum_{j=0}^s A[b] c^j = \sum_{i,j=0}^{r,s} A b^i c^j$ となる $s \in \mathbb{N}$ がある．よって $A[b, c]$ は有限生成 A 加群で, 補題 3.1.3 より $A[b, c]$ の任意の元は A 上整．

(1) $b, c \in B$ が A 上整なら, 特に c は $A[b]$ 上整なので, 冒頭の注意から $A[b, c]$ の任意の元は A 上整．特に $b + c, bc \in A[b, c]$ は A 上整．

(2) $b \in B$ が A'_B 上整なら, $a_1, \ldots, a_m \in A'_B$ があって $b^m + a_1 b^{m-1} + \cdots + a_m = 0$．特に b は $A' := A[a_1, \ldots, a_m]$ 上整で, $A[b]$ は A' 加群として有限生成．一方, a_i 達は A 上整だから, 冒頭の議論を繰り返し用いて, A' は A 加群として有限生成．よって $A[b]$ は A 加群として有限生成で, 補題 3.1.3 より b は A 上整.

[*1] 2018/10/18 版, ver. 0.4.
[*2] この講義ノートでの記号です．整閉包の記号で決まったものはないと思います．
[*3] この講義ノートでは $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とします．

□

定義 3.1.4. (1) 環 A が拡大環 B での整閉包 A'_B と一致するとき, A は B において**整閉** (integrally closed) であるという.

(2) 整域 A がその商体 $Q(A)$ での整閉であるとき, A を**整閉整域** (integrally closed domain) と呼ぶ[*4].

問題 3.1 ($*$)**.** (p, q) を互いに素な正の整数の組とする. また k を体とし, $A = k[t^p, t^q]$ (t は k 上超越元) とする. この時, A の商体は $k(t)$ で, そこでの A の整閉包は $k[t]$ になることを示せ. つまりこの場合の A は整閉ではない.

補題 3.1.5. 整閉整域 A の局所化 $S^{-1}A$ はまた整閉整域である.

問題 3.2 ($*$)**.** 補題 3.1.5 を証明せよ.

定義. スキーム X は, 既約かつ各 $x \in X$ での $\mathcal{O}_{X,x}$ が整閉整域であるとき, **正規** (normal) と呼ばれる.

命題 3.1.6. アフィンスキーム $\mathrm{Spec}(A)$ は正規 $\iff$ A は整閉整域.

証明. $\Longleftarrow$ は補題 3.1.5 から従う.

逆を示そう. まず, $\mathrm{Spec}(A)$ が既約なので A は整域. 次に A' を $Q(A)$ における A の整閉包とし, 任意に $b \in A'$ をとる. $A : b \subset A$ を $A : b = \{a \in A \mid ab \in A\}$ と定め, $A : b \neq A$ と仮定して矛盾を導けばよい. 実際, $A : b = A$ なら $1_A \in A : b$ より $b \in A$ となる.

背理法の仮定から $A : b$ は A の真のイデアルなので, それを含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ がある. すると, $\mathrm{Spec}(A)$ が正規であるという仮定から, $A_{\mathfrak{m}}$ は整閉整域で $b \in A_{\mathfrak{m}}$ となる. よってある $a \in A \setminus \mathfrak{m}$ が存在して $ab \in A$. これは $a \in A : b \subset \mathfrak{m}$ と矛盾する. □

3.2 Weil 因子の定義

この副節では X は既約なスキームで, Noether 整閉整域 A_i のアフィンスキーム X_i による有限被覆

$$X = \cup_{i=1}^{r} X_i, \quad X_i = \mathrm{Spec}(A_i)$$

を持つものとする[*5]. 特に X は正規スキームである.

例えば体 k 上の正規代数多様体がこの条件を満たす。実際、命題 3.1.6 より、有限個のアフィン開集合 $X_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ で X を被覆すれば各 A_i が Noether 整閉整域になる.

X 上の因子を導入する前に, スキームの次元に関する用語を幾つか準備しておく. まず一般の位相空間に対し余次元を定義しておく.

定義. X を位相空間とする.

(1) 既約閉集合 $Z \subset X$ の (X における) **余次元** (codimension) を次式で定義する.

$$\operatorname{codim} Z = \operatorname{codim}_X Z := \max\{n \mid Z = F_0 \subsetneq \cdots \subsetneq F_n \subsetneq X,\ F_i \subset X \text{ は既約閉集合 }\}.$$

[*4] 正規環と呼ぶこともありますが, この講義では [松80, p.78, §9] の用語に合わせます.

[*5] ver. 0.4 で仮定を緩めました.

(2) 閉集合 $Y \subset X$ の**余次元**を次式で定義する.

$$\operatorname{codim} Y = \operatorname{codim}_X Y := \inf\{\operatorname{codim}_X Z \mid Z \text{ は } Y \text{ の既約成分 }\}.$$

アフィンスキームの閉集合の余次元をイデアルで言い換えておこう. $\operatorname{Spec}(A)$ の既約閉集合列 $F_0 \subsetneq \cdots \subsetneq F_l$ は, $F_j = V(\mathfrak{p}_j)$, $p_j \in \operatorname{Spec}(A)$ と表せば素イデアルの列 $\mathfrak{p}_0 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_l$ に対応することを念頭において, 次のような概念を導入する.

定義. A を環とする.

(1) A の素イデアル $\mathfrak{p}$ の**高さ** (height) を次式で定義する.

$$\operatorname{ht}\mathfrak{p} := \max\{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_n,\ \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec}(A)\}.$$

(2) A のイデアル $\mathfrak{a}$ の**高さ**を次式で定義する.

$$\operatorname{ht}\mathfrak{a} := \inf\{\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A),\ \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}.$$

以上の準備のもと, まず素因子を定義する.

定義. X の余次元 1 の閉部分整スキームを X の**素因子** (prime divisor) と呼ぶ.

余次元と高さの定義から次のことがわかる.

補題 3.2.1. $X = \cup_{i=1}^r X_i$ を Noether 整閉整域 A_i のアフィン開集合 $X_i = \operatorname{Spec}(A_i)$ による被覆とする. 素因子 $Y \subset X$ について, $Y \cap X_i \neq \emptyset$ ならば, A_i の高さ 1 の素イデアル $\mathfrak{p}_i$ があって $Y \cap X_i = V(\mathfrak{p}_i)$.

以上の準備の下, Weil 因子を次のように定義する.

定義 3.2.2. (1) X の素因子たちが生成する ($\mathbb{Z}$ 上の) 自由加群を X の**因子群** (divisor group) といい, $\operatorname{Div} X$ と表す.

(2) また $\operatorname{Div} X$ の元を X の **Weil 因子** (Weil divisor) と呼ぶ.

(3) Weil 因子 $D \in \operatorname{Div} X$ を $D = \sum_{i=1}^s n_i Y_i$ ($n_i \in \mathbb{Z}$, Y_i は X の素因子) と表したとき, 全ての i について $n_i \geq 0$ の時, D は**有効** (effective) であるという.

Weil 因子の考察には Noether 整閉整域の諸性質が使われるので, 次の副節ではそれについて復習する.

3.3 Noether 整閉整域と因子

この副節は [飯80, §§2.6–2.13] に従う.

まず次の定理を紹介する.

定理 3.3.1. 1 次元 Noether 局所整閉整域 $(A, \mathfrak{m})$ は正則局所環. また極大イデアル $\mathfrak{m}$ は単項生成で, $\mathfrak{m} = (\pi)$, $\pi \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ と書ける.

この定理の証明はしない. [飯80, p.73, 定理 2.7] または [H77, p.40, Theorem 6.2A, Chap.I §6] を参照せよ. 正則局所環の定義だけ復習しておくと

定義 3.3.2. $(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする.

(1) 剰余体 $k = A/\mathfrak{m}$ 上の線形空間 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ の双対空間 $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ を A の **Zariski 接空間** (Zariski tangent space) と呼ぶ.

(2) Zariski 接空間の次元が $\dim A$ と等しいとき, A を**正則局所環** (regular local ring) という.

問題 3.3 $(**)$**.** Noether 局所環 A の Zariski 接空間は有限次元で, その次元は $\dim A$ 以上であることを導け. (中山の補題と Krull の標高定理を用いる.)

定理 3.3.1 の後半の主張から, 離散付値に関する次の結果が得られる.

命題 3.3.3. $(A, \mathfrak{m})$ を 1 次元 Noether 局所整閉整域とし, $\pi \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ とする. また A の商体を $K = Q(A)$ と書く. 写像 $\mathrm{ord} : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ を以下の手順で定義する.

(i) $\mathrm{ord}(0) := \infty$ とする.

(ii) $a/b \in A \subset K$ の場合. このとき b は A の単元. ここで $a \in A \setminus \{0\}$ は $a = \pi^r u$, u は A の単元, と書けることに注意する. 実際, 単項イデアル $(a) = aA$ は $\mathfrak{m}$ に含まれるため $(a) = \pi\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \subset A$ はイデアル, と書ける. これを繰り返していくと, Noether 性より $r < \infty$ があって $(a) = \pi^r$. この r を用いて $\mathrm{ord}(a/b) := r$ と定める.

(iii) $a/b \notin A$ の場合. $b \in \mathfrak{m}$, $a \notin \mathfrak{m}$ としてよいから $b/a \in A$. そこで $\mathrm{ord}(a/b) := -\mathrm{ord}(b/a)$ と定める.

このとき, ord は K の A による**離散付値** (discrete valuation) である. つまり次の 3 つの主張が成立する.

(1) $\mathrm{ord}(rs) = \mathrm{ord}(r) + \mathrm{ord}(s)$.　(2) $\mathrm{ord}(r+s) \geq \min(\mathrm{ord}(r), \mathrm{ord}(s))$.　(3) $\mathrm{ord}(r) = \infty \iff r = 0$.

特に $\mathrm{ord}^{-1}(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) = A$, $\mathrm{ord}^{-1}(\mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}) = \mathfrak{m}$ となる.

後の応用のために, この主張を次の形にまとめておく.

定義 3.3.4. A を Noether 整閉整域とし, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ を $\dim A_{\mathfrak{p}} = 1$ なる素イデアルとする. このとき, $A_{\mathfrak{p}}$ は 1 次元 Noether 整閉整域だから, 商体 $Q(A_{\mathfrak{p}}) = Q(A)$ の $A_{\mathfrak{p}}$ による離散付値が定義される. これを $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}$ と書く.

次に Noether 環におけるイデアルの準素分解の復習をする.

定義. A を環, M を A 加群とする.

(1) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ が **M の素因子** (prime divisor) または **M に付随する素イデアル** (associated prime ideal) であるとは, ある $m \in M$ があって $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m) := \{a \in A \mid am = 0\}$ となることを言う.

(2) 1 つしか素因子を持たない A のイデアルを**準素イデアル** (primary ideal) という.

定理 (Noether 環の準素分解)**.** Noether 環の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ について,

(1) $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ と準素イデアル $\mathfrak{q}_i$ たちの共通部分として書ける. このような表示で長さ r が最小になるものを $\mathfrak{a}$ の**最短準素分解**と呼ぶ.

(2) 最短準素分解 $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ において, $\mathfrak{p}_j := \sqrt{\mathfrak{q}_j}$ は $\mathfrak{q}_j$ を含む極小の素イデアルで, それらで $\mathfrak{a}$ の素因子を尽くす.

定義. Noether 環のイデアル $\mathfrak{a}$ の最短準素分解 $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ において, $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ とする.

(1) $\mathfrak{p}_i$ が $\mathfrak{a}$ の**埋没素因子** (embedded prime divisor) または**非孤立素因子**であるとは, $\mathfrak{p}_i \supset \mathfrak{p}_j$ なる $j \neq i$ があるもののことである.

(2) 埋没因子以外の $\mathfrak{p}_i$ を**孤立素因子** (minimal prime divisor) と呼ぶ.

注意. (1) 最短準素分解は一意とは限らない. 例えば k を体として, $A = k[x, y]$ のイデアル $I = (xy, y^2)$ を A 加群とみなすと, I は 2 つの異なる最短準素分解 $I = (y) \cap (x, y^2) = (y) \cap (x + y, y^2)$ を持つ.

(2) $\mathfrak{p}_i \supset \mathfrak{p}_j$ なる $\mathfrak{p}_i$ を "埋没"素因子と呼ぶのは, 準素分解 $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ に対応するアフィンスキームの閉集合 $V(\mathfrak{a})$ の分解

$$V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{q}_1) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{q}_r) = V(\mathfrak{p}_1) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{p}_r)$$

において, $V(\mathfrak{p}_i) \subset V(\mathfrak{p}_j)$ となっているからである. 素因子の添え字をつけなおして, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ が孤立素因子, $\mathfrak{p}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{p}_r$ が埋没素因子となるようにすると, $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{p}_1) \cup \cdots \cup V(\mathfrak{p}_r)$ が既約分解になる.

ここで Noether 整閉整域の判定条件を紹介する.

定理 3.3.5 (Krull, Serre, 永田)**.** A の Noether 整域とする. A が整閉整域になるための必要十分条件は

(i) $\dim A_{\mathfrak{p}} = 1$ となる $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ について $A_{\mathfrak{p}}$ は付値環.

(ii) 任意の $a \in A$ に対し, A の単項生成イデアル $(a) = aA$ は埋没因子を持たない.

この定理も証明しない. [飯80, p.76, 定理 2.8] を参照せよ.

これと準素イデアル分解を用いて, 次の定理を示すことができる.

定理 3.3.6. A を Noether 整閉整域とすると, A の商体の中で次が成立する.

$$A = \cap_{\mathfrak{p} \in P} A_{\mathfrak{p}}, \quad P := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \dim A_{\mathfrak{p}} = 1\}.$$

証明. $A \subset \cap_{\mathfrak{p} \in P} A_{\mathfrak{p}}$ は明らかなので, 逆の包含関係を示す.

$b/a \in \cap_{\mathfrak{p} \in P} A_{\mathfrak{p}}$ を取る. A のイデアル $(a) = aA$ の最短準素分解 $aA = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ を取る. ここで定理 3.3.5 より aA は埋没因子を持たないから, 各 i について $\mathfrak{p}_i := \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ は $\operatorname{ht} \mathfrak{p}_i = 1$. 従って仮定から $b/a \in A_{\mathfrak{p}_i}$. よって $b \in aA_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{q}_i A_{\mathfrak{p}_i}$. つまり $b \in A_{\mathfrak{q}_i}$. i は任意だったので $b \in \cap_{i=1}^r \mathfrak{q}_i = aA$, つまり $b/a \in A$.

□

3.4 因子類群

§3.2 の設定に戻って Weil 因子の議論を再開しよう. X は既約なスキームで, Noether 整閉整域 A_i のアフィンスキーム X_i による有限被覆

$$X = \cup_{i=1}^r X_i, \quad X_i = \operatorname{Spec}(A_i)$$

を持つものとする. 特に X は正規スキームである.

X は整スキームなので, その有理関数全体 $K(X)$ は体である (定義 2.7.3). また各 A_i に対して $K(X) = Q(A_i)$ となる (命題 2.7.4 (4)). そして A_i は Noether 整閉整域だから, $K(X) = Q(A_i)$ の離散付値 $\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}_i}$ (定義 3.3.4) を考えることができる.

補題 3.4.1. Y を X の素因子とし, $X \cap X_i \neq \emptyset$ なる i について, $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec}(A_i)$ は高さ 1 で $Y \cap X_i = V(\mathfrak{p}_i)$ だとする (補題 3.2.1). このとき, X 上の有理関数 $\varphi \in K(X)$ の離散付値 $\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}_i}(\varphi)$ は Y のみに依存する.

証明. まず i によらないことを示す. $Y \cap X_i \neq \emptyset$ かつ $Y \cap X_j \neq \emptyset$ と仮定すると, これらは既約空間 Y の空でない開集合だから $Y \cap X_i \cap X_j = (Y \cap X_i) \cap (Y \cap X_j) \neq \emptyset$. ところで, Y は整スキーム X の閉部分スキーム

だからやはり整スキームで, 特に生成点 η を持つ (命題 2.7.4 (1)). すると $\eta \in Y \cap X_i \cap X_j$ だから, 局所環の同型 $A_{i,\mathfrak{p}_i} \simeq \mathcal{O}_{Y,\eta} \simeq A_{j,\mathfrak{p}_j}$ が成立する. 従って $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_i}(\varphi) = \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}_j}(\varphi)$.

被覆を $X = \cup_{i=1}^s X'_i$, $X'_i = \mathrm{Spec}(B_i)$ に変えても, $X_{i,j} := X'_i \cap X_j$ たちからなる X の被覆について前の議論を繰り返せば, 付値が変わらないことがわかる. □

定義. 補題 3.4.1 の離散付値を $\mathrm{ord}_Y(\varphi)$ と書く.

次に Weil 因子が well-defined であることを保証する補題を 1 つ用意する.

補題. 各 $\varphi \in K(X) \setminus \{0\}$ に対し, $\mathrm{ord}_Y(\varphi) \neq 0$ なる素因子 $Y \subset X$ は有限個しかない.

証明. $\varphi \in K(X) = Q(A_1)$ を $\varphi = b/a$, $a, b \in A_1$ と書く. $X_1 = \mathrm{Spec}(A_1)$ において $V(b) = W'_1 \cup \cdots W'_s$ と既約成分に分解し, X での W'_j の閉包を W_j^+ と書くと $V(b) = X_1 \cap (W_1^+ \cup \cdots \cup W_s^+)$. 同様に $V(a) = X_1 \cap (W_1^- \cup \cdots \cup W_t^-)$ と書ける. 一方で $X \setminus X_1$ は閉集合だから既約成分に分けられるが, X の Noether 性からそのうち余次元 1 のものは有限個しかなく, それらを $W_1, \ldots, W_u$ と書く.

すると, 任意の素因子 $Y \subset X$ について, $Y \cap X_1 = \emptyset$ なら Y は $W_1, \ldots, W_u$ のどれかである. $Y \cap X_1 \neq \emptyset$ なら, $Y = W_i^+$ となるときのみ $\mathrm{ord}_Y(\varphi) > 0$ であり, $Y = W_i^-$ となるときのみ $\mathrm{ord}_Y(\varphi) < 0$ となる. 以上より $\mathrm{ord}_Y(\varphi) \neq 0$ なる Y は高々 $s + t + u$ 個で, 従って有限個. □

以上の準備によって, ようやく Weil 因子を導入することができる.

定義. 有理関数 $\varphi \in K(X) \setminus \{0\}$ について,

(1) Weil 因子 $(\varphi) \in \mathrm{Div}\, X$ を次式で定める.

$$(\varphi) := \textstyle\sum_{Y:\ X\ \text{の素因子}} \mathrm{ord}_Y(\varphi) Y.$$

(2) $e := \mathrm{ord}_Y(\varphi)$ とする. $e > 0$ のとき, φ は Y で e 重の**零点** (zero) を持つという. また $e < 0$ のとき, φ は Y で $-e$ 位の**極** (pole) を持つという.

(3) Weil 因子 $D \in \mathrm{Div}\, X$ は, 適当な有理関数 φ で $D = (\varphi)$ と書けるとき, **主因子** (principal divisor) と呼ばれる.

離散付値の性質 (命題 3.3.3 (1)) より $(\varphi\psi) = (\varphi) + (\psi)$, つまり主因子は $\mathrm{Div}\, X$ の部分群をなす.

定義 3.4.2. (1) $D, D' \in \mathrm{Div}\, X$ は, $D - D'$ が主因子のとき**線形同値** (linearly equivalent) であるといい, $D \sim D'$ と書く.

(2) 主因子のなす部分群による $\mathrm{Div}\, X$ の剰余群を X の**因子類群** (divisor class group) と呼び $\mathrm{Cl}\, X$ と書く.

3.5 Cartier 因子

Weil 因子の定義は幾何学的な意味が明瞭ではあるが, 考えるスキームが正規でないと上手く議論ができない. より広いクラスのスキームに対する因子の概念が Cartier 因子である.

まず任意のスキームに対して全商環層を導入する. これは整スキームの有理関数体を一般のスキームに拡張したものである.

注意. 一般の環 A の**全商環** (total quotient ring) の定義を思い出しておく. A の零因子でない元の集合を S とすると, これは積閉集合である. S による局所化 $S^{-1}A$ を A の全商環というのだった.

定義. X をスキームとする. 開集合 $U \subset X$ に対し部分集合 $S(U) \subset \mathcal{O}_X(U)$ を

$$S(U) := \{a \in \mathcal{O}_X(U) \mid \text{各 } x \in U \text{ に対し, } \mathcal{O}_{X,x} \text{ において } a \text{ は零因子でない}\}$$

と定めると, $S(U)$ は積閉集合である. 環の前層 $U \mapsto S(U)^{-1}\mathcal{O}_X(U)$ の層化を X の**全商環層** (sheaf of total quotient rings) と呼び, $\mathcal{K}_X$ と書く[*6].

$\mathcal{K}_X$ の可逆元からなる (乗法的) 群の層を $\mathcal{K}_X^*$ と書く. また $\mathcal{O}_X$ の可逆元からなる層を $\mathcal{O}_X^*$ と書く. X 上の群の層の短完全列

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^* \longrightarrow 1 \tag{3.1}$$

があることに注意する. ここで 1 は (乗法的) 自明群の層のこと.

定義. スキーム X 上の **Cartier 因子** (Cartier divisor) とは商層 $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$ の大域切断のこと, つまり $\Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ の元のことである.

注意 3.5.1.
(1) 商層の定義に戻って考えると, Cartier 因子は次のように記述できる. $X = \cup_{i\in I} U_i$ を開被覆として, 各 i について $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X^*)$ が与えられていて, $f_i/f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$ となる. そこで, このように書ける Cartier 因子のことを $\{(U_i, f_i) \mid i \in I\}$ と書くことにする.
(2) Cartier 因子は乗法によって群をなすが, 可換なので, 加法的に $D_1 + D_2$ などと書くことにする.

短完全列 (3.1) の大域切断を取ることで, 次の完全列が得られる.

$$1 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}^*) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^*) \xrightarrow{\varpi} \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*). \tag{3.2}$$

ここで大域切断函手の左完全性を用いた (次の問題を参照).

問題 3.4 (* 大域切断函手の左完全性)**.** X を位相空間とする. 大域切断函手 $\Gamma(X, -)$ は左完全であることを示せ. つまり, $0 \xrightarrow{f_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{f_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{f_2} \mathcal{F}_3 \xrightarrow{f_3} 0$ を X 上の加群層の短完全列とすると, $0 \xrightarrow{\Gamma(X,f_0)} \Gamma(X, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\Gamma(X,f_1)} \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\Gamma(X,f_2)} \Gamma(X, \mathcal{F}_3)$ が完全列であることを示せ.

定義. Cartier 因子は完全列 (3.2) の写像 ϖ の像に含まれるとき**主因子**であると呼ばれる.

また 2 つの Cartier 因子 D_1, D_2 が**線形同値**であるとは, $D_1 - D_2$ が主因子である (注意 3.5.1 (2) 参照) ときをいい, $D_1 \sim D_2$ と書く.

Cartier 因子の線形同値による同値類のなす群, つまり $\operatorname{Coker} \varpi$ を $\operatorname{CaCl} X$ と書く.

一般のスキームについては Weil 因子と Cartier 因子は必ずしも一致しない. やや強い仮定の下で一致する, というのが次の事実である. ここでは証明はしない. [H77, p.141, Chap,II, §6, Proposition 6.11] を参照のこと.

定理 3.5.2. X が分離的 Noether 整スキームで, 各点での局所環が一意分解環だとする. このとき

$$\operatorname{Div} X \simeq \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*),$$

つまり Weil 因子と Cartier 因子は同一視できる. 更にこの同一視で Weil 主因子と Cartier 主因子が対応する.

[*6] 後で扱う標準因子 (canonical divisor) の記号 K_X と紛らわしいですが, これを使うことにします.

3.6 可逆層と Cartier 因子

この副節では Cartier 因子と可逆層との関係を説明する．しばらく一般の環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ で議論するが, スキームの場合にならって $X = (X, \mathcal{O}_X)$ と記号を簡略化する．

定義. X を環付き空間とする．

(1) $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{F}$ が**局所自由** (locally free) であるとは, 各点 $x \in X$ に対しある開近傍 U が存在して, $\mathcal{F}|_U$ が自由 $\mathcal{O}_X|_U$ 加群層であることをいう．
特に $\mathcal{F}|_U$ の階数が x に依存しない値 n をとる場合, $\mathcal{F}$ は**階数** n の局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群層であるという．

(2) X 上の**可逆層** (invertible sheaf) とは階数 1 の局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群層のことである．

可逆層の基本的な性質を次の補題で述べるが, そのために層のテンソル積について復習しよう．

環付き空間 X 上の $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ に対し, それらの ($\mathcal{O}_X$ 上での) **テンソル積** (tensor product) $\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}_2$ とは, 前層

$$U \longmapsto \mathcal{F}_1(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{F}_2(U) \quad (\mathcal{O}_X(U) \text{ 加群のテンソル積})$$

の層化で得られる $\mathcal{O}_X$ 加群層のことである．誤解がないときはテンソルの記号を簡略化して $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ と書く．

補題. $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ が X 上の可逆層なら $\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2$ も可逆層である．

また X 上の可逆層 $\mathcal{L}$ に対し, $\mathcal{O}_X$ 加群層として $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \simeq \mathcal{O}_X$ となる可逆層 $\mathcal{L}^{-1}$ が同型を除いて一意に存在する．

この補題により次の定義が well-defined になる．

定義. X を環付き空間とする．X 上の可逆層の同型類の集合とテンソル積 $\otimes$ で定まる可換群を X の **Picard 群** (Picard group) と呼び $\operatorname{Pic} X$ と書く．

さて, これ以降は X をスキームとして, 可逆層と Cartier 因子との関係を説明しよう．X の全商環層 $\mathcal{K}_X$ と Cartier 因子の表記に関する注意 3.5.1 (1) を思い出しておく．

定義 3.6.1. $D = \{(U_i, f_i) \mid i \in I\}$ をスキーム X 上の Cartier 因子とする．部分層 $\mathcal{O}_X(D) \subset \mathcal{K}_X$ を

$$\mathcal{O}_X(D)|_{U_i} := (\mathcal{O}_X|_{U_i}).f_i^{-1},$$

つまり U_i 上では f_i^{-1} で生成される $\mathcal{K}_X$ の部分 $\mathcal{O}_X$ 加群層として定義する．$\mathcal{O}_X(D)$ を **D に付随する層**[*7]と呼ぶ．

これで well-defined であることは, $U_i \cap U_j$ 上では f_i/f_j は可逆なので, f_i^{-1} と f_j^{-1} が同じ $\mathcal{O}_X$ 加群を生成することから従う．

命題 3.6.2. D, D_1, D_2 をスキーム X の Cartier 因子とする．

(1) $\mathcal{O}_X(D)$ は X 上の可逆層.

(2) 写像 $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ により X 上の Cartier 因子と $\mathcal{K}_X$ の可逆部分層は 1 対 1 対応する．

(3) $\mathcal{O}_X$ 加群層として $\mathcal{O}_X(D_1 - D_2) \simeq \mathcal{O}_X(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D_2)^{-1}$. 特に $\mathcal{O}_X(-D) \simeq \mathcal{O}_X(D)^{-1}$.

---

*7 [H77] では $\mathcal{L}(D)$ という記号が使われています．

(4) $D_1 \simeq D_2 \iff \mathcal{O}_X$ 加群層として $\mathcal{O}_X(D_1) \simeq \mathcal{O}_X(D_2)$.

問題 3.5 (∗∗)**.** 命題 3.6.2 を示せ.

系 3.6.3. 任意のスキーム X について, 写像

$$\mathrm{CaCl}\, X \longrightarrow \mathrm{Pic}\, X, \quad D \longmapsto \mathcal{O}_X(D)$$

は well-defined であり, 可換群の単射準同型である.

系 3.6.3 の準同型がいつ同型になるか, という自然な問題がある. 整スキームの場合は同型であるというのが次の命題である. また, この命題のおかげで Cartier 因子は有用なものだと分かる.

命題 3.6.4. X が整スキームなら系 3.6.3 の群準同型 $\mathrm{CaCl}\, X \to \mathrm{Pic}\, X$ は同型.

証明は [H77, p.145, Proposition 6.15, Chap.II §6] を参照せよ.

3.7 閉部分スキームと Cartier 因子

最後に Cartier 因子と閉部分スキームの関係を述べておこう.

定義. X をスキームとする.

(1) X 上の Cartier 因子 D は, $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ となる表示 $D = \{(U_i, f_i) \mid i \in I\}$ ができるとき, **有効** (effective) であるという.

(2) X 上の有効 Cartier 因子 D に**付随する閉部分スキーム**とは, 表示 $D = \{(U_i, f_i) \mid i \in I\}$, $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ を取った時に

$$\mathcal{I}|_{U_i} := (\mathcal{O}_X|_{U_i}).f_i \quad (\subset \mathcal{K}_X|_{U_i})$$

で与えられる $\mathcal{O}_X$ のイデアル層 $\mathcal{I}$ で定義される X の閉部分スキームのことである.

$\mathcal{O}_X(D)$ の定義を思い出せば, 次の主張は直ちに得られる.

補題 3.7.1. スキーム X 上の有効 Cartier 因子 D とそれに付随する閉部分スキーム Y について, Y を定義するイデアル層を $\mathcal{I}_Y$ と書くと, $\mathcal{I}_Y \simeq \mathcal{O}_X(-D)$.

参考文献

[H77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer, 1977;
高橋宣能, 松下大介訳, **代数幾何学 1,2,3**, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2008.

[飯80] 飯高茂, **代数幾何学 I**, 岩波基礎数学講座, 岩波書店, 1976.

[松80] 松村英之, **可換環論**, 共立出版, 1980.

以上です.