2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　10 月 11 日分レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

2　スキーム論の初歩 2: スキーム

問題 2.0 ($*$–$***$)**.** [*2] 講義で省略した主張の証明を与えよ. また, 講義で省略した概念の定義を与えよ.

2.3　部分スキーム

補題 2.3.1. A を環, I を A のイデアルとする. 剰余環 A/I への自然な全射環準同型 $\pi : A \twoheadrightarrow A/I$ に付随した連続写像 ${}^a\pi : \mathrm{Spec}(A/I) \to \mathrm{Spec}(A)$ の像は $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \supset I\}$ と一致する. 特に ${}^a\pi$ の像は閉集合である.

問題 2.1 ($*$)**.** 補題 2.3.1 を確かめよ.

問題 2.2 ($*$)**.** k を体とする. アフィンスキーム X を $X := \mathrm{Spec}(k[x,y])$ と定め, 開集合 $U := X \setminus \{(0,0)\}$ を X の開部分スキームとみなす. U がアフィンスキームでないことを示せ.

2.4　被約スキームと整スキーム

補題 2.4.1. $X = (X, \mathcal{O}_X)$ をスキームとする. 前層 $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)_{\mathrm{red}}$ の層化を $(\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}$ と書くと, $(X, (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}})$ はスキームである.

問題 2.3 ($*$)**.** 補題 2.4.1 を示せ.

補題 2.4.3. 環 A について, A は整域 $\iff$ アフィンスキーム $\mathrm{Spec}(A)$ は被約かつ既約.

問題 2.4 ($*$)**.** 補題 2.4.3 の $\Longrightarrow$ を示せ.

問題 2.5 ($**$)**.** 体 k 上の環 R_n を

$$R_n := k[x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{2,1}, \ldots, x_{nn}, y]/\bigl(1 - y\det(x_{ij})_{i,j=1}^n\bigr)$$

と定義し, アフィンスキーム X_n を $X_n := \mathrm{Spec}(R_n)$ と定める. X_n はアフィン代数多様体であることを示せ.

2.5　相対的な設定, ファイバー積, 値点

問題 2.6 ($*$)**.** 任意のスキームは $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上のスキームと見なせることを示せ. また, $(\mathcal{S}ch/\mathbb{Z})$ は全てのスキームのなす圏 $(\mathcal{S}ch)$ と同値であることを示せ.

[*1] 2018/09/23, ver. 0.1.
[*2] 問題番号の後に $*$ がいくつか書いてありますが, これは難易度または量の目安です. $*$ 1 つあたり 3–5 点で採点する予定です.

問題 2.7 (∗∗)**.** ファイバー積の以下の性質を確認せよ.

(i) $X \times_S S \simeq X$, (ii) $X \times_S Y \simeq Y \times_S X$, (iii) $(X \times_S Y) \times_S Z \simeq X \times_S (Y \times_S Z)$,
(iv) $(X \times_S T) \times_T Y \simeq X \times_S Y$.

問題 2.8 (∗)**.** アフィンスキームの直積 $\mathrm{Spec}(A) \times \mathrm{Spec}(B) = \mathrm{Spec}(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$ の位相は $\mathrm{Spec}(A)$ と $\mathrm{Spec}(B)$ の直積位相ではないことを説明せよ.

問題 2.9 (∗∗)**.** 問題 2.5 のアフィンスキーム X_n を考える. A を k 上の代数とし, A に成分を持つ可逆 n 次行列の全体を $\mathrm{GL}_n(A)$ と書く. このとき, 次の等式が成立することを示せ.

$$\mathrm{GL}_n(A) \;=\; X_n(A).$$

問題 2.10 (∗∗∗)**.** 問題 2.5 と 2.9 と同様に, 古典群もアフィン代数多様体の構造を持つことを説明せよ.

命題 2.5.1. ファイバー積 $X \times_S Y$ は以下の性質を満たす S 上のスキームとして特徴付けられる.

- 任意の S スキーム Z に対し $(X \times_S Y)(Z) = X(Z) \times Y(Z)$.

問題 2.11 (∗∗)**.** 命題 2.5.1 を証明せよ.

2.7　正則関数と有理関数

定義. X をスキームとする.

(1) X 上の**有理関数** (rational function) とは, 稠密開集合 $U \subset X$ と切断 $\varphi \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ の組 (U, φ) の, 以下の同値関係 $\sim$ に関する同値類 $[(U, \varphi)]$ のことである.

$$(U, \varphi) \sim (V, \psi) \iff \text{ある稠密開集合 } W \subset U \cap V \text{ が存在して } \varphi \mid W = \psi \mid W.$$

(2) X 上の有理関数 $[(U, \varphi)]$ と $[(V, \psi)]$ に対し $[(U, \varphi)] + [(V, \psi)] := [(U \cap V, \varphi + \psi)]$, $[(U, \varphi)] \cdot [(V, \psi)] := [(U \cap V, \varphi \cdot \psi)]$ とし, これで定まる有理関数たちのなす環を**有理関数環** (ring of rational functions) と呼び, $K(X)$ と書く.

補題 2.7.4. X を整スキームとする.

(1) X には生成点が一意に存在する. 以下 ξ を X の生成点とする.
(2) 生成点 ξ での局所環 $\mathcal{O}_{X,\xi}$ は体である.
(3) $K(X) \simeq \mathcal{O}_{X,\xi}$.
(4) $U = \mathrm{Spec}(X) \subset X$ をアフィン開集合とすると, $K(X)$ は A の**商体** (field of quotients) $Q(A)$ と同型.

問題 2.12 (∗∗)**.** 補題 2.7.4 を示せ.

2.8　次元

補題 2.8.2. 環 A の次元 $\dim A$ は A の Krull 次元と一致する.

問題 2.13 (∗)**.** 補題 2.8.2 を示せ.

以上です.