2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV 10 月 11 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

2 スキーム論の初歩 2: スキーム

今回はスキームの定義と基本概念の復習をする. 特に部分スキーム, 被約性, 整, ファイバー積, 分離性の定義を復習し, 代数多様体の定義を与える. また有理関数体やスキームの次元についても復習する.

2.1 スキームの定義

層に関する概念を幾つか思い出しておこう.

命題 2.1.1. 位相空間 X 上の前層 $\mathcal{F}$ に対し, 以下の性質を満たす層 ${}^a\mathcal{F}$ と前層の射 $\psi : \mathcal{F} \to {}^a\mathcal{F}$ の組 $({}^a\mathcal{F}, \psi)$ が, 唯一の同型を除いて唯一に存在する.

- X 上の任意の層 $\mathcal{G}$ と任意の射 $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ に対し, $\varphi = \psi \circ \theta$ となる射 $\theta : {}^a\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が唯一存在する.

定義. 命題 2.1.1 の層 ${}^a\mathcal{F}$ を前層 $\mathcal{F}$ の**層化** (sheafification) と呼ぶ.

定義 2.1.2. $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を位相空間 X 上の加群層の射とする.

(1) 各開集合 $U \subset X$ に
$$(\operatorname{Ker}\varphi)(U) := \operatorname{Ker}\bigl(\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)\bigr)$$
を対応させると, X 上の加群層 $\operatorname{Ker}\varphi$ が定まる. これを射 φ の**核** (kernel) と呼ぶ.

(2) 各開集合 $U \subset X$ に
$$U \longmapsto \operatorname{Coker}\bigl(\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)\bigr)$$
を対応させると X 上の加群の前層が定まるが, **これは層にはならない**. この前層の層化を $\operatorname{Coker}\varphi$ と書き, 射 φ の**余核** (cokernel) と呼ぶ.

(3) 各開集合 $U \subset X$ に
$$U \longmapsto \operatorname{Im}\bigl(\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)\bigr)$$
を対応させると X 上の加群の前層が定まるが, **これは層にはならない**. この前層の層化を $\operatorname{Im}\varphi$ と書き, 射 φ の**像** (image) と呼ぶ.

定義 2.1.3. $f : X \to Y$ を位相空間の連続写像とする. また $\mathcal{G}$ を Y 上の層とする. $\mathcal{G}$ の f による**引き戻し** (pull back)[*2] $f^{-1}\mathcal{G}$ とは, 次の対応で得られる前層の層化のことである.
$$U \longmapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V).$$

[*1] 2018/10/18, ver. 0.4.
[*2] [H77, p.65, Chap.II, §1, Definition] では逆像 (inverse image) と呼ばれています.

定義 2.1.4. X を位相空間とし, $\mathcal{F}$ を X 上の層とする. $Z \subset X$ を部分集合とし, Z に相対位相を入れて位相空間とみなす. $\mathcal{F}$ の Z への**制限** (restriction) とは, 包含写像 $i : Z \hookrightarrow X$ による $\mathcal{F}$ の引き戻し $i^{-1}\mathcal{F}$ のことである. これを $\mathcal{F}|_Z$ と書く.

ようやくスキームの定義をすることができる. 局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ と開集合 $U \subset X$ に対し, $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ は再び局所環付き空間になることに注意しよう.

定義. スキーム (scheme)[*3] とは局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ であって, 開被覆 $X = \cup_{i \in I} U_i$ が存在して, 各 $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ があるアフィンスキーム $(\mathrm{Spec}(A_i), \widetilde{A}_i)$ と局所環付き空間として同型になるもののことである.

スキーム $(X, \mathcal{O}_X)$ に対し, $\mathcal{O}_X$ を**構造層** (structure sheaf) と呼び, X を**底空間** (underlying space) と呼ぶ. また $x \in X$ に対し局所環 $\mathcal{O}_{X,x}$ を x **での局所環**と呼ぶ.

スキームの射を定義してこの副節を終えよう.

定義. スキームの射 (morphism of schemes) とは局所環付き空間としての射 (定義 1.6.6) のことである.

スキームとその射のなす圏を $(\mathcal{S}ch)$ と書く.

2.2 準連接加群層

環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ に対し $\mathcal{O}_X$ 加群層の概念を定義 1.5.2 で導入したことを思い出しておこう. $\mathcal{O}_X$ 加群層の射は (加群) 層の射の定義 1.6.1 と同様に定義される.

定義. $(X, \mathcal{O}_X)$ を環付き空間とする.

(1) $\mathcal{O}_X$ 加群とその射のなす圏を $\mathcal{M}od(\mathcal{O}_X)$ と書く.

(2) I を集合とし, $\mathcal{F}_i$ $(i \in I)$ を $\mathcal{O}_X$ 加群層とする. 対応

$$U \longmapsto \oplus_{i \in I} \mathcal{F}_i(U) \quad (\mathcal{O}_X(U) \text{ 加群の直和})$$

で定まる $\mathcal{O}_X$ 加群層を $\oplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$ と書き, $\mathcal{F}_i$ たちの**直和** (direct sum) と呼ぶ. 全ての $i \in I$ について $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}$ の時は $\mathcal{F}^{\oplus I} := \oplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$ と書く.

(3) 特に $\mathcal{O}_X^{\oplus I}$ を**自由 $\mathcal{O}_X$ 加群層** (sheaf of free $\mathcal{O}_X$-modules) と呼ぶ. そして $|I|$ をその**階数** (rank) と呼ぶ.

同様に $\mathcal{O}_X$ 加群層の**直積** (direct product) も定義できる. また定義 2.1.2 と同様に, $\mathcal{O}_X$ 加群層の射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ に対して $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathrm{Ker}\,\varphi$, $\mathrm{Coker}\,\varphi$ 及び $\mathrm{Im}\,\varphi$ が定義できる.

実は次のことが知られている. 証明は例えば [GM03, Chap.II, §§5.1–5.16] を参照せよ.

命題. $(X, \mathcal{O}_X)$ を環付き空間とすると, 圏 $\mathcal{M}od(\mathcal{O}_X)$ は Abel 圏.

従って通常のホモロジー代数の議論が圏 $\mathcal{M}od(\mathcal{O}_X)$ で行える. 特に $\mathcal{O}_X$ 加群層の**完全列**が考えられる.

次に準連接層の概念を導入したい. $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{F}$ を開集合 $U \subset X$ に制限した $\mathcal{F}|_U$ は $\mathcal{O}_X|_U$ 加群であることに注意しよう.

定義 2.2.1. $(X, \mathcal{O}_X)$ を環付き空間とし, $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$ 加群層とする. 任意の $x \in X$ に対し, 開近傍 $U \ni x$ と集合

[*3] かつてはこの scheme のことを prescheme と呼び, 後で扱う separated prescheme のことを scheme と呼んでいました.

I, J および $\mathcal{O}_X|_U$ 加群層の完全列

$$\mathcal{O}_X^{\oplus I}|_U \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus J}|_U \longrightarrow \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

が存在するとき, $\mathcal{F}$ は**準連接** (quasi-coherent) であるという.

注意. この定義で集合 I, J は x に依存する.

天下りに準連接層の定義を与えたが, これから見ていくように, アフィンスキーム上の加群層を考えるとこの定義は自然なものである. 環 A と A 加群 M について, 命題 1.5.3 により $\widetilde{A}$ 加群層 $\widetilde{M}$ で $\widetilde{M}(D(f)) = M_f$ となるものが唯一存在することを思い出そう.

命題 2.2.2. $\widetilde{M}$ は準連接 $\widetilde{A}$ 加群層. また対応 $M \mapsto \widetilde{M}$ は函手的.

証明のために 1 つ準備をする.

命題 2.2.3. 函手 $M \mapsto \widetilde{M}$ は完全. つまり A 加群の短完全列 $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ から $\widetilde{A}$ 加群層の短完全列 $0 \to \widetilde{M_1} \to \widetilde{M_2} \to \widetilde{M_3} \to 0$ が得られる.

証明. 一般の積閉集合 $S \subset A$ による局所化 $M \mapsto S^{-1}M$ が完全函手であること (問題 1.2 とその後の注意 1.2.5) から従う. □

命題 2.2.2 の前半の証明. $M = \sum_{m \in M} Am$ と書けるから, $I := M$ として, 全射 A 準同型 $f : A^{\oplus I} \ni (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i i \in M$ がある. $\operatorname{Ker} f$ にも直和 $A^{\oplus J}$ からの全射が作れて, A 加群の完全列 $A^{\oplus J} \to A^{\oplus I} \xrightarrow{f} M \to 0$ を得る. これと命題 2.2.3 から, $X = \operatorname{Spec}(A)$, $\mathcal{O}_X := \widetilde{A}$ として, $\mathcal{O}_X$ 加群層の完全列

$$\mathcal{O}_X^{\oplus J} \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus I} \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow 0$$

が得られる. よって $\widetilde{M}$ は準連接層. □

実は逆に

定理 2.2.4. アフィンスキーム $(X, \mathcal{O}_X) = (\operatorname{Spec}(A), \widetilde{A})$ 上の準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{F}$ は $\widetilde{\mathcal{F}(X)}$ と同型. また $\mathcal{O}_X$ 加群層の射 $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ は, A 準同型 $f = \varphi(X) : \mathcal{E}(X) \to \mathcal{F}(X)$ からつくった $\widetilde{f}$ と一致する.

証明は [H77, p.113, Proposition 5.4, Chap.II §5] を参照せよ.

命題 2.2.2 と定理 2.2.4 は次のように言い換えられる. アフィンスキーム $(X, \mathcal{O}_X) = (\operatorname{Spec}(A), \widetilde{A})$ のことを単に $\operatorname{Spec}(A)$ と書き, また $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)} := \widetilde{A}$ と書く.

系. A を環とする. 函手 $M \mapsto \widetilde{M}$ は, A 加群圏 $\mathcal{M}od(A)$ とアフィンスキーム $\operatorname{Spec}(A)$ 上の準連接 $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}$ 加群層のなす圏 $\mathcal{QC}oh(\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})$ との圏同値を与える.

2.3 部分スキーム

これ以降, 誤解がない状況ではスキームの記号を $X := (X, \mathcal{O}_X)$ と簡略化する.

定義. スキーム X の**開部分スキーム** (open subscheme) とはスキーム $(U, \mathcal{O}_U)$ であって, 底空間 U が X の開部分集合であり, 構造層 $\mathcal{O}_U$ が $\mathcal{O}_X$ の制限 (定義 2.1.4) $\mathcal{O}_X|_U$ と同型であるもののことである.

次に閉部分スキームを導入する．まずアフィンスキームの場合を復習しておくと

補題 2.3.1. A を環, I を A のイデアルとする．剰余環 A/I への自然な全射環準同型 $\pi : A \twoheadrightarrow A/I$ に付随した連続写像 ${}^a\pi : \mathrm{Spec}(A/I) \to \mathrm{Spec}(A)$ の像は $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \supset I\}$ と一致する．特に ${}^a\pi$ の像は閉集合である．

問題 2.1 $(*)$**.** 補題 2.3.1 を確かめよ．

次に一般のスキームに関する議論のために, イデアル層の定義を書き下しておく．

定義. $(X, \mathcal{O}_X)$ を環付き空間とする．X 上の**イデアル層** (sheaf of ideals on X) $\mathcal{I}$ とは, 各開集合 $U \subset X$ に対し $\mathcal{I}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$ のイデアルであるような $\mathcal{O}_X$ 加群層のことである．

イデアル層は $\mathcal{O}_X$ 加群層なので, 定義 2.2.1 より準連接イデアル層という概念が well-defined である．

補題 2.3.2. $(X, \mathcal{O}_X)$ をスキームとし, $\mathcal{I}$ を X 上の準連接イデアル層とする．このとき $Y := \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \subset X$ は閉集合であり, $(Y, (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})|_Y)$ はスキームになる．

ここで次の定義を用いた．

定義 2.3.3. 位相空間 X 上の加群層 $\mathcal{F}$ の**台** (support) $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$ を次式で定義する．

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) := \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}.$$

補題 2.3.2 の証明. $p \in Y$ のアフィン開近傍 $U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$ を取る．定理 2.2.4 より $\mathcal{I}|_U \simeq \widetilde{I}$ と A のイデアル I が決まり, $U \cap Y \simeq \mathrm{Spec}(A/I)$ となる．補題 2.3.1 よりこれは閉集合だから, Y も閉集合である．また $(Y, (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})|_Y)$ がスキームであることも分かる． □

以上の準備のもと, 次のように部分スキームを定義する．

定義 2.3.4. X をスキームとする．

(1) $\mathcal{I}$ を X 上の準連接イデアル層とする．補題 2.3.2 のスキーム $(Y, (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})|_Y)$ を $\mathcal{I}$ **が定める** X **の閉部分スキーム** (closed subscheme) と呼ぶ．

(2) スキーム $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が X の**閉部分スキーム**であるとは, X 上の準連接イデアル層 $\mathcal{I}$ があって, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が (1) の $\mathcal{I}$ が定める X の閉部分スキームと同型であることをいう．

(3) X の開部分スキーム U の閉部分スキーム Y を X の**部分スキーム** (subscheme) と呼ぶ．

問題 2.2 $(*)$**.** k を体とする．アフィンスキーム X を $X := \mathrm{Spec}(k[x, y])$ と定め, 開集合 $U := X \setminus \{(0, 0)\}$ を X の開部分スキームとみなす．U がアフィンスキームでないことを示せ．

開部分スキームや閉部分スキームの概念を射の概念で言い換えておく．

定義. $f : X \to Y$ をスキームの射とする．

(1) f が**開埋入** (open immersion) であるとは, 底空間の像 $f(X) \subset Y$ が開部分集合であり, 開部分スキームとの同型 $(X, \mathcal{O}_X) \simeq (f(X), \mathcal{O}_Y|_{f(X)})$ が成り立つもののことである．

(2) f が**閉埋入** (closed immersion) であるとは, $f(X) \subset Y$ が閉部分集合であり, 底空間を $f(X)$ とする Y のある閉部分スキームと X が同型であるもののことである．

2.4 被約スキームと整スキーム

まず環の被約性について復習しよう.

定義. 環 A の**冪零根基** (nilradical) とは零イデアルの根基のことであり, $\sqrt{(0)}$ で表す.

注意. 根基の定義から $\sqrt{(0)}$ は A の冪零元全体である. よって $A/\sqrt{(0)}$ は冪零元を持たない環, つまり**被約** (reduced) な環である.

定義. 環 A に対し $A_{\mathrm{red}} := A/\sqrt{(0)}$ と定める.

次の補題が主張するように, 被約かどうかはスペクトラムからは判定できない.

補題. 位相空間として $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(A_{\mathrm{red}})$.

証明. $\mathrm{Spec}(A) = V((0)) = V(\sqrt{(0)})$ より従う. □

そこで次のように定義する.

定義. 環 A のアフィンスキーム $X = \mathrm{Spec}(A) = (\mathrm{Spec}(A), \widetilde{A})$ に対し, A_{red} のアフィンスキームを $X_{\mathrm{red}} := \mathrm{Spec}(A_{\mathrm{red}}) = (\mathrm{Spec}(A_{\mathrm{red}}), \widetilde{A_{\mathrm{red}}})$ と書く.

一般のスキームに対しては, まず

定義. スキーム X が**被約**であるとは, 任意の開集合 U について $\mathcal{O}_X(U)$ が被約なときをいう.

次のようにして任意のスキームから被約なスキームを構成できる.

補題 2.4.1. $X = (X, \mathcal{O}_X)$ をスキームとする. 前層 $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)_{\mathrm{red}}$ の層化を $(\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}$ と書くと, $(X, (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}})$ はスキームである.

問題 2.3 $(*)$**.** 補題 2.4.1 を示せ.

定義. 補題 2.4.1 のスキーム $(X, (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}})$ を X_{red} と書く.

最後に**整域** (domain) に対応するスキームの概念をまとめておく.

定義. スキーム X が**整** (integral) であるとは, 任意の開集合 U について $\mathcal{O}_X(U)$ が整域であるときをいう.

命題 2.4.2. スキーム X が整であることと被約かつ既約であることは同値.

証明は [H77, p.82, Chap.II, §3, Proposition 3.1] を参照のこと. ここではアフィンスキームの場合のみ扱う.

補題 2.4.3. 環 A について, A は整域 $\iff$ アフィンスキーム $\mathrm{Spec}(A)$ は被約かつ既約.

証明. $\Longleftarrow$ のみ示す. $\mathrm{Spec}(A)$ が被約かつ既約と仮定して, A には零因子がないことを示そう. もし $ab = 0$ なる $a, b \in A \setminus \{0\}$ があれば, $\mathrm{Spec}(A) = V((0)) = V((ab)) = V((a)) \cup V((b))$. 既約性から $V((a)) = V((0))$ としてよい. よって $\sqrt{(a)} = \sqrt{(0)}$. 被約性の仮定から A は冪零元を持たないので $a = 0$ が言える. □

問題 2.4 (∗)**.** 補題 2.4.3 の $\Longrightarrow$ を示せ.

定義. k を体とする.

(1) 有限生成 k 代数 A のアフィンスキーム $\mathrm{Spec}(A)$ を k 上の**代数的アフィンスキーム** (affine algebraic scheme over k) と呼ぶ.

(2) k 上の有限生成整域 A のアフィンスキーム $\mathrm{Spec}(A)$ を k 上の**アフィン代数多様体** (affine algebraic variety over k) と呼ぶ.

問題 2.5 (∗∗)**.** 体 k 上の環 R_n を

$$R_n := k[x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{2,1}, \ldots, x_{nn}, y]/\bigl(1 - y\det(x_{ij})_{i,j=1}^n\bigr)$$

と定義し, アフィンスキーム X_n を $X_n := \mathrm{Spec}(R_n)$ と定める. X_n はアフィン代数多様体であることを示せ.

2.5 相対的な設定, ファイバー積, 値点

定義. S をスキームとする.

(1) スキーム X とスキームの射 $f : X \to S$ の組 (X, f) を S **上のスキーム** (scheme over S), あるいは S **スキーム** (S-scheme) と呼ぶ. また f を S スキーム (X, f) の**構造射** (structure morphism) という.

(2) S スキーム (X, f) と (Y, g) の間の**射** (morphism of S-schemes) とはスキームの射 $\varphi : X \to Y$ であって, 次の図式を可換にする, 即ち $f = g \circ \varphi$ となるもののことである.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

(3) S スキームとその射のなす圏を $(\mathcal{S}ch/S)$ と書く.

S が環 R のアフィンスキーム $S = \mathrm{Spec}(R)$ の場合は, $\mathrm{Spec}(R)$ 上のスキームという代わりに R **上のスキーム**といい, $(\mathcal{S}ch/\mathrm{Spec}(R))$ の代わりに $(\mathcal{S}ch/R)$ と書く.

問題 2.6 (∗)**.** 任意のスキームは $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上のスキームと見なせることを示せ. また, $(\mathcal{S}ch/\mathbb{Z})$ は全てのスキームのなす圏 $(\mathcal{S}ch)$ と同値であることを示せ.

圏 $(\mathcal{S}ch/S)$ 上で議論することを**相対的** (relative) な議論という. 相対的な議論の例として, ファイバー積の定義を復習しよう.

定義 2.5.1. S をスキームとし, (X, f) と (Y, g) を S スキームとする. X と Y の S 上の**ファイバー積** (fiber product) とは, S スキーム $X \times_S Y$ と S スキームの射 $p_X : X \times_S Y \to X$ 及び $p_Y : X \times_S Y \to Y$ の組 $(X \times_S Y, p_X, p_Y)$ であって次の 2 つの性質を満たすもののことである.

- 次の図式は可換.

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

- S スキーム Z と S 上の射 $\varphi : Z \to X$ 及び $\psi : Z \to Y$ であって, 下の図式の実線部分が可換になるものが与えられたとき, S 上の射 $\theta : Z \to X \times_S Y$ が一意に存在して, $\varphi = p_X \circ \theta$ かつ $\psi = p_y \circ \theta$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "\psi"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & S
\end{tikzcd}$$

簡単のため $X \times_S Y$ だけでファイバー積を表すことにする.

定理. ファイバー積 $X \times_S Y$ は同型を除いて一意に存在し, 同型も一意に決まる.

証明の方針は, S, X, Y が全てアフィンなら, $S = \mathrm{Spec}(R)$, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ として $X \times_S Y := \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ とすればよい. 一般の場合は張り合わせで構成する. 詳細は [H77, p.87, Chap.II, §3, Theorem 3.3] を参照せよ.

問題 2.7 (∗∗)**.** ファイバー積の以下の性質を確認せよ.
(i) $X \times_S S \simeq X$, (ii) $X \times_S Y \simeq Y \times_S X$, (iii) $(X \times_S Y) \times_S Z \simeq X \times_S (Y \times_S Z)$,
(iv) $(X \times_S T) \times_T Y \simeq X \times_S Y$.

定義. $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ 上のファイバー積 $X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$ を $X \times Y$ と書き, X と Y の直積 (direct product) と呼ぶ.

問題 2.8 (∗)**.** アフィンスキームの直積 $\mathrm{Spec}(A) \times \mathrm{Spec}(B) = \mathrm{Spec}(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$ の位相は $\mathrm{Spec}(A)$ と $\mathrm{Spec}(B)$ の直積位相ではないことを説明せよ.

ファイバー積にはより簡明な定義があることを説明しよう. そのためにまず次の概念を導入する.

定義. S をスキームとし, X を S スキームとする. S スキーム Z に対し

$$X(Z) := \mathrm{Hom}_{(\mathcal{S}ch/S)}(Z, X) = \{S \text{ スキームの射 } Z \to X\}$$

と書き, X の S 上での Z **値点** (Z-valued point) と呼ぶ. 特に Z がアフィンスキーム $\mathrm{Spec}(R)$ の場合は

$$X(R) := X(\mathrm{Spec}(R)) = \mathrm{Hom}_{(\mathcal{S}ch/S)}(\mathrm{Spec}(R), X)$$

と書き, X の S 上での R **値点**と呼ぶ.

問題 2.9 (∗∗)**.** 問題 2.5 のアフィンスキーム X_n を考える. A を k 上の代数とし, A に成分を持つ可逆 n 次行列の全体を $\mathrm{GL}_n(A)$ と書く. このとき, 次の等式が成立することを示せ.

$$\mathrm{GL}_n(A) = X_n(A).$$

問題 2.10 (∗∗∗)**.** 問題 2.5 と 2.9 と同様に, 古典群もアフィン代数多様体の構造を持つことを説明せよ.

命題 2.5.2. ファイバー積 $X \times_S Y$ は以下の性質を満たす S 上のスキームとして特徴付けられる.
- 任意の S スキーム Z に対し $(X \times_S Y)(Z) = X(Z) \times Y(Z)$.

問題 2.11 (∗∗)**.** 命題 2.5.2 を証明せよ.

2.6 分離性, 有限型, 代数多様体

位相空間の Hausdorff 性に関する次の主張を思い出そう: 位相空間 X が Hausdorff であることと, 直積空間 $X \times X$ の部分集合 $\Delta(X) := \{(x,x) \mid x \in X\}$ が閉であることは同値.

問題 2.8 で見たように, スキームの直積の位相は直積位相ではないので, 上の主張は適用できない. 実際, §1 で見たように, Zariski 位相は Hausdorff 性を満たすとは限らない.

スキームの分離性は, 条件 "$\Delta(X) := \{(x,x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ が閉" を抽出したものである. 正確には

定義. S スキーム X の**対角射** (diagonal morphism) $\Delta_{X/S} : X \to X \times_S X$ とは, 恒等射 $X \xrightarrow{=} X$ とファイバー積の定義 2.5.1 から定まる S 上のスキームの射のことである (次の図式を参照せよ).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\Delta_{X/S}"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X \times_S X \arrow[r, "p_X"'] \arrow[d, "p_X"] & X \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

定義 2.6.1. X を S スキームとする. $\Delta_{X/S}(X)$ が閉集合になるとき, X は S **上分離的** (separated over S) であるという. またこのとき, 構造射 $X \to S$ は**分離的射** (separated morphism) であるという.

S がアフィンスキーム $\mathrm{Spec}(R)$ のときは, S 上分離的であることを R **上分離的**であるという.

定義 2.6.2. $f : X \to Y$ をスキームの射とする.

(1) f が**局所有限型** (locally of finite type) であるとは, Y のアフィン開被覆 $Y = \cup_{i \in I} V_i$, $V_i = \mathrm{Spec}(B_i)$ があって, 各 $i \in I$ について $f^{-1}(V_i)$ がアフィン開被覆 $f^{-1}(V_i) = \cup_{j \in J_i} U_{ij}$, $U_{ij} = \mathrm{Spec}(A_{ij})$ を持ち, 各 $j \in J_i$ について A_{ij} が有限生成 B_{ij} 代数であるもののことをいう.

(2) f が**有限型** (of finite type) であるとは, 局所有限型であって, かつ (1) の記号で各 $i \in I$ について J_i が有限集合にとれるもののことである.

またこのとき, X は Y 上局所有限型, もしくは Y 上有限型という.

更に $Y = \mathrm{Spec}(R)$ の場合, X は R 上局所有限型, もしくは R 上有限型という.

これでようやく代数多様体の定義ができる.

定義. 体 k 上分離的かつ有限型である整スキームを k 上の**代数多様体** (algebraic variety over k) という.

命題 2.4.2 より, k 上の代数多様体は k 上分離的かつ有限型で, 被約かつ既約なスキームとも定義できる.

代数多様体を含むクラスとして有用なものに代数的スキームがある.

定義 2.6.3. 体 k 上分離的かつ有限型であるスキームを k 上の**代数的スキーム** (algebraic scheme over k) という.

2.7 正則関数と有理関数

定義. X を位相空間とし, $U \subset X$ を開集合とする.

X 上の層 $\mathcal{F}$ に対し, $\Gamma(U, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(U)$ と書き, その元のことを U 上定義された $\mathcal{F}$ の**切断** (section) と呼ぶ. 特に $\Gamma(X, \mathcal{F})$ の元を**大域切断** (global section) と呼ぶ.

同様に, 層の射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ に対し $\Gamma(U, \varphi) := \varphi(U)$ と書く.

定義. スキーム X 上の**正則関数** (regular function) とは $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ の元, つまり構造層の大域切断のこと.

正則関数は以下の命題 2.7.1 のようにスキームの射と見なせる.

定義. 環 R 係数の 1 変数多項式環 $R[t]$ のアフィンスキームを $\mathbb{A}^1_R := \mathrm{Spec}(R[t])$ とかき, **アフィン直線**と呼ぶ.

命題 2.7.1. X を環 R 上のスキームとすると, 次の R 代数の同型が成立する.

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \simeq \mathrm{Hom}_{(\mathcal{S}ch/R)}(X, \mathbb{A}^1_R).$$

証明. 系 1.6.9 の相対化である次の主張を用いる.

命題. R 代数の圏を $(\mathcal{A}lg/R)$ と書くと, R 上のスキーム Y と環 A について

$$\mathrm{Hom}_{(\mathcal{S}ch/R)}(Y, \mathrm{Spec}(A)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{(\mathcal{A}lg/R)}(A, \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)), \quad (f, \theta) \longmapsto \theta(\mathrm{Spec}(A)).$$

この命題で $Y := X$, $A := R[t]$ として $\mathrm{Hom}_{(\mathcal{S}ch/R)}(X, \mathbb{A}^1_R) \simeq \mathrm{Hom}_{(\mathcal{A}lg/R)}(R[t], \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$. 更に任意の R 代数 B について, R 代数の同型

$$\mathrm{Hom}_{(\mathcal{A}lg/R)}(R[t], B) \xrightarrow{\sim} B, \quad f \longmapsto f(t)$$

があることに注意する. $B := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ としたものを先の同型につないで, 結論を得る. □

次にスキーム上の有理関数を考える.

定義. X をスキームとする.

(1) X 上の**有理関数** (rational function) とは, 稠密開集合 $U \subset X$ と切断 $\varphi \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ の組 (U, φ) の, 以下の同値関係 $\sim$ に関する同値類 $[(U, \varphi)]$ のことである.

$$(U, \varphi) \sim (V, \psi) \iff \text{ある稠密開集合 } W \subset U \cap V \text{ が存在して } \varphi \mid W = \psi \mid W.$$

(2) X 上の有理関数 $[(U, \varphi)]$ と $[(V, \psi)]$ に対し $[(U, \varphi)] + [(V, \psi)] := [(U \cap V, \varphi + \psi)]$, $[(U, \varphi)] \cdot [(V, \psi)] := [(U \cap V, \varphi \cdot \psi)]$ とし, これで定まる有理関数たちのなす環を**有理関数環** (ring of rational functions) と呼び, $K(X)$ と書く[*4] .

(3) X 上の有理関数 f の定義域 $\mathrm{dom}(f)$ を次で定義する.

$$\mathrm{dom}(f) := \cup_{(U,\varphi) \in f} U.$$

次の補題が示唆するように, 少なくとも被約スキームに対してはこの有理関数の定義は意味がある.

[*4] 後に扱うことになる, X の標準因子 K_X と記号が似ていますが, 別の概念です. 有理関数体の記号は色々あって, $k(X)$ や $R(X)$ なども使われます.

補題. f を被約スキーム X 上の正則関数とする. X の稠密開集合 U 上で $f \mid U = 0$ となるなら, $f = 0$.

証明. $X = \mathrm{Spec}(A)$, $U = D(a)$, $a \in A$ としてよい. 仮定 $f \mid D(a) = 0$ から, ある $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して $fa^m = 0$. よって $X = V(0) = V(f) \cup V(a)$. 次に $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots$ と既約成分に分けると, 各 $j = 1, 2, \ldots$ について $X_j = (X_j \cap V(f)) \cup (X_j \cap V(a))$. ここで U が稠密であることから $X_j \cap V(a) \neq X_j$. すると既約性から $X_j = (X_j \cap V(f))$. j は任意だったから $V(f) = X$. すると Hilbert の零点定理の系 (系 1.3.5) より $f \in \sqrt{(0)}$. A は被約だから $f = 0$. □

系. X を被約スキームとし, f を X 上の有理関数とする. このとき $\varphi := f \mid \mathrm{dom}(f)$ は $\mathrm{dom}(f)$ 上の正則関数, つまり $\varphi \in \Gamma(\mathrm{dom}(f), \mathcal{O}_X)$ となる. また $(\mathrm{dom}(f), \varphi) \in f$ である.

整スキームでは有理関数が体をなすことを示そう. 特に代数多様体の**有理関数体**が定義できることになる.

命題 2.7.2. (1) X を有限個の既約成分 $X_1, \ldots, X_n$ を持つスキームとし, 各 X_j が生成点 ξ_j を持つと仮定する. このとき $K(X) = \oplus_{i=1}^n \mathcal{O}_{X_i, x_i}$.

(2) 環 A は有限個の極小素イデアル $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ を持つものとする. $S := A \setminus \cup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$ とすると, $K(\mathrm{Spec}(A)) = S^{-1}A$.

(3) 環 A のアフィンスキーム $\mathrm{Spec}(A)$ が既約なら, $K(\mathrm{Spec}(A))$ は A の全商環である. 特に A が整域なら $K(\mathrm{Spec}(A))$ は A の商体である.

証明. (1) X の任意の稠密開集合 U に対して $K(U) = K(X)$ となることに注意する.

X が既約なら, 生成点を ξ とかくと, stalk の定義から $K(X) = \mathcal{O}_{X,\xi}$.

次に X が有限個の既約成分を持つと仮定する. $X_i' := X_i \setminus \cup_{j \neq i} X_i$ とする. $i \neq j$ なら $X_i' \cap X_j' = \emptyset$ なので, $X' := \cup_i X_i$ は $X' = \sqcup_i X_i'$ となり, 更に X の稠密開集合である. 従って $K(X) = K(X') = \oplus_i K(X_i')$. 前半の議論より $K(X_i') = \mathcal{O}_{X,\xi}$. よって示せた.

(2) と (3) は (1) をアフィンスキームの場合に言い換えたものである. □

命題 2.7.2 (3) より次の定義が well-defined になる.

定義 2.7.3. 整スキーム X に対し, 体 $K(X)$ を**有理関数体** (field of rational functions) と呼ぶ.

整スキームの有理関数体に関する事実を次の補題 2.7.4 にまとめておく. 特に (3) により, 生成点での局所環を有理関数体の定義とすることもある.

補題 2.7.4. X を整スキームとする.

(1) X には生成点が一意に存在する. 以下 ξ を X の生成点とする.

(2) 生成点 ξ での局所環 $\mathcal{O}_{X,\xi}$ は体である.

(3) $K(X) \simeq \mathcal{O}_{X,\xi}$.

(4) $U = \mathrm{Spec}(A) \subset X$ をアフィン開集合とすると, $K(X)$ は A の**商体** (field of quotients)[*5] $Q(A)$ と同型.

問題 2.12 (∗∗)**.** 補題 2.7.4 を示せ.

[*5] 分数体 (field of fractions) とも呼ばれます.

2.8 次元

スキームの次元は底空間の次元として定義する．一般の位相空間の次元の定義は次の通り．

定義 2.8.1. 位相空間 X の既約閉集合 F_i の増大列 $\emptyset \subsetneq F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_l \subset X$ の長さを l と定める．そして, この長さの最大値を X の**次元**と呼び $\dim X$ と書く．但し最大値がないときは $\dim X := \infty$ とする．

定義. スキーム X の次元 $\dim X$ を, 底空間の定義 2.8.1 の意味での次元で定義する．
また環 A の次元を $\dim A := \dim \mathrm{Spec}(A)$ で定義する．

以下ではスキームの次元の環論的な意味づけを考える．まずアフィンスキームの場合は簡単で,

定義. 環 A の素イデアルの下降列 $\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_l$ の長さを l と定める．そして, この長さの最大値を A の **Krull 次元**と呼ぶ．但し最大値がないときは Krull 次元を ∞ と定める．

補題 2.8.2. 環 A の次元 $\dim A$ は A の Krull 次元と一致する．

問題 2.13 $(*)$**.** 補題 2.8.2 を示せ．

一般のスキームの次元に関しては, スキームに条件を何も課さないと, いえることは少ない．代数的スキーム, 特に代数多様体の場合は次の主張が成り立つ．

定理. X を体 k 上の代数的スキームとし, $X = \cup_{i \in I} X_i$ を既約成分への分解とする．各 X_i に被約スキームの構造を与えたものは代数多様体になるが, それをあらためて X_i と書く．この時

$$\dim X \;=\; \max\{\mathrm{tr.deg}_k\, K(X_i) \mid i \in I\}.$$

これは次の環論的な主張の言い換えである．整域 A の商体を $Q(A)$ と書く．

定理. A を体 k 上の有限生成整域とすると

$$\dim A \;=\; \mathrm{tr.deg}_k\, Q(A).$$

証明は [松80, p.43, 定理 5.6, §5] を参照せよ．

参考文献

[GM03] S. Gelfand, Y. Manin, *Methods of homological algebra*, 2nd ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2003.

[H77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer, 1977;
高橋宣能, 松下大介訳, **代数幾何学 1,2,3**, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2008.

[松80] 松村英之, **可換環論**, 共立出版, 1980.

以上です.