2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV　10 月 04 日分レポート問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

1 スキーム論の初歩 I: アフィンスキーム

問題 1.0 ($*$–$***$)**.** [*2] 講義で省略した主張の証明を与えよ. また, 講義で省略した概念の定義 (例えば帰納極限の定義) を与えよ.

1.1 環のスペクトル

問題 1.1 ($*$)**.** k を代数閉体とする. 以下の主張を確かめよ.

(1) $k[x]_{(0)} := \{g(x)/f(x) \mid f(x), g(x) \in k[x],\ f(0) \neq 0\}$ を考えると $\mathrm{Spec}(k[x]_{(0)}) = \{(0), (x)\}$. これを $\mathrm{Spec}(k[x]_{(0)}) = \{*, 0\}$ と書くと, 開集合は $\emptyset$, $\{*\}$, $\{*, 0\}$ の 3 つ.

(2) k 係数 2 変数多項式環 $k[x, y]$ の素イデアルは以下の 3 種類である.
- (0).
- 定数でない既約多項式 f で生成される単項イデアル (f).
- $(a, b) \in k^2$ に対して $(x - a, y - b)$.

1.2 環の局所化とスペクトル

問題 1.2 ($**$ 局所化とテンソル積)**.** A を環とし, S を A の積閉集合とする. また M を A 加群とする. 環の局所化の普遍性 (命題 1.2.4) を用いて以下が成立することを示せ.

(1) $S^{-1}A \otimes_A M \xrightarrow{\sim} S^{-1}M$.

(2) A 加群の完全列 $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ から次の $S^{-1}A$ 加群の完全列が定まる.

$$0 \longrightarrow S^{-1}M_1 \longrightarrow S^{-1}M_2 \longrightarrow S^{-1}M_3 \longrightarrow 0.$$

(3) S_1 と S_2 を A の積閉集合とする. 定義 1.2.2 (2) の環準同型 $A \to S_2^{-1}A$ による S_1 の像を S_1' と書くと, S_1' は $S_2^{-1}A$ の積閉集合であり, かつ $(S_1S_2)^{-1}M \xrightarrow{\sim} (S_1')^{-1}(S_2^{-1}M)$.

1.3 Hilbert の零点定理

問題 1.3 ($*$)**.** $\varphi\colon A \to B$ を環準同型とする. 準同型定理 $A/\mathrm{Ker}\,\varphi \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\,\varphi \subset B$ を用いて以下を示せ.

(1) φ が全射なら, 位相空間として $\mathrm{Spec}\,B \simeq V(\mathrm{Ker}\,\varphi) \subset \mathrm{Spec}(A)$ であり, ${}^a\varphi$ は閉集合 $V(\mathrm{Ker}\,\varphi)$ への同相写像. 特に ${}^a\varphi$ は (中への)1 対 1 写像.

(2) ${}^a\varphi$ が全射なら $V(\mathrm{Ker}\,\varphi) = \mathrm{Spec}\,A$. 特に $\mathrm{Ker}\,\varphi = \cap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)} \mathfrak{p}$.

[*1] 2018/11/08 版, ver. 0.2.

[*2] 問題番号の後に $*$ がいくつか書いてありますが, これは難易度または量の目安です. $*$ 1 つあたり 3–5 点で採点する予定です.

問題 1.4 $(*)$**.** A を環とする．以下の主張を示せ．

(1) A の積閉集合 S について, 補集合 $A \setminus S$ がイデアルになるとき, このイデアルは素イデアル．

(2) $\mathrm{Spec}(A)$ の $\mathfrak{p}$ での局所環 $A_{\mathfrak{p}}$ の極大イデアルは $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ のみ．

系 1.3.5 (Hilbert の零点定理の系)**.** 環 A とそのイデアル I, J について

(1) $\mathrm{Spec}(A) = \emptyset \iff A = 0$.

(2) $V(I) \subset V(J) \iff \sqrt{I} \supset \sqrt{J}$.

(3) $V(I) = V(J) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}$.

1.4 Zariski 位相の性質

命題 1.4.2. I を環 A のイデアルとすると, $V(I)$ が既約 $\iff$ $\sqrt{I}$ が素イデアル．

問題 1.5 $(*)$**.** (1) Hilbert の零点定理の系 1.3.5 を用いて命題 1.4.2 を示せ．

(2) 閉集合 $\overline{\{\mathfrak{p}\}} \subset \mathrm{Spec}(A)$ を相対位相で位相空間とみなすと, それは既約であることを示せ．

定義 1.4.3. 位相空間 X とその点 $x, y \in X$ について,

(1) $y \in \overline{\{x\}}$ の時, x を y の**一般化** (generalization), y を x の**特殊化** (specialization) と呼ぶ．

(2) $\overline{\{x\}} = X$ の時, x を X の**生成点** (generic point) と呼ぶ．

問題 1.6 $(*)$**.** 定義 1.4.3 において $X = \mathrm{Spec}(A)$ の場合を考える, $x = \mathfrak{p}$, $y = \mathfrak{q}$ と素イデアルで書き直すと, 次のようになる[*3]ことを確認せよ．

$$\overline{\{x\}} \ni y \iff \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}.$$

問題 1.7 $(*)$**.** $\mathrm{Spec}(A)$ の生成点は高々 1 つしか存在しないことの別証を, 次の 2 つを示すことで与えよ．

(1) $\mathrm{Spec}(A)$ は T_0 空間, つまり任意の 2 点 $x, y \in \mathrm{Spec}(A)$ に対し開集合 U が存在して $x \in U$ かつ $y \notin U$.

(2) 既約な T_0 空間の生成点は高々 1 つしか存在しない．

1.5 アフィンスキーム

問題 1.8 $(***)$**.** 微分可能多様体や複素多様体, ないし複素解析多様体も自然に局所環付き空間とみなせる．このことを説明せよ．

1.6 アフィンスキームの射

定理 1.6.8. アフィンスキームの間の射 $(f, \theta) : (\mathrm{Spec}(A), \widetilde{A}) \to (\mathrm{Spec}(B), \widetilde{B})$ は, ある環準同型 $\varphi : B \to A$ から作られた $({}^{a}\varphi, \widetilde{\varphi})$ と一致する．

以上です．

[*3] ver. 0.2 で typo を直しました．