2018 年度後期 代数学 IV/代数学概論 IV 10 月 04 日分講義ノート[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida[at]math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

1 スキーム論の初歩 I: アフィンスキーム

この講義では**環** (ring) といったら単位元を持つ可換環のこととする．はっきりさせたいときは, 環 A の零元を 0_A と書き, 単位元を 1_A と書く．また**環準同型** (ring homomorphism) は単位元を保つもののみ考える．

今回はアフィンスキームの復習をする．

1.1 環のスペクトル

環 A の**イデアル** (ideal) I とは, (加法に関する) 部分加群 $I \subset A$ であって任意の $x \in I$ と $a \in A$ に対して $ax \in I$ となるもののことであった．また A の**素イデアル** (prime ideal) I とは, イデアル $I \subsetneq A$ であって, $a, b \in A$ に対し $ab \in I$ ならば $a \in I$ または $b \in I$ となるもののことであった．

定義. 環 A に対し集合 $\mathrm{Spec}(A)$ を次で定める．

$$\mathrm{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} \subset A \mid \text{素イデアル}\}.$$

例 1.1.1. k を代数閉体として, k 係数の 1 変数多項式環 $k[x]$ を考える．k が体なので $k[x]$ の任意のイデアルは単項生成であり, また k が代数閉体なので任意の $f \in k[x]$ は $f = a_0 \prod_{i=1}^{r} (x - a_i)^{e_r}$ と 1 次式に因数分解できることに注意する．すると

$$\mathrm{Spec}(k[x]) = \{(0)\} \cup \{(x - a) \mid a \in k\}.$$

よって $* = (0)$ と書くと $\mathrm{Spec}(k[x]) = \{*\} \cup k$ と同一視できる．

定義. A を環とする．集合 $\mathrm{Spec}(A)$ に, 各 $f \in A$ に対して

$$D(f) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

で生成される位相をいれたものを A の**スペクトル** (spectrum) と呼び, 単に $\mathrm{Spec}(A)$ と書く．またこの位相を $\mathrm{Spec}(A)$ の **Zariski 位相**と呼ぶ．

つまり $\mathrm{Spec}(A)$ の開集合は, 適当な集合 Λ があって $\cup_{l \in \Lambda} D(f_l)$ と書ける．

定義 1.1.2. A のイデアル I に対し $D(I) \subset \mathrm{Spec}(A)$ を次で定める．

$$D(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid I \not\subset \mathfrak{p}\}.$$

次の補題の (2) より $D(I)$ は Zariski 位相に関して開集合である．

[*1] 2018/11/08 版, ver. 0.5.

補題. A を環とし, $f, g \in A$ とする.

(1) $D(0_A) = \emptyset$, $D(1_A) = \mathrm{Spec}(A)$, $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.

(2) $\{f_l \in A \mid l \in \Lambda\}$ で生成される A のイデアルを I と書くと $D(I) = \cup_{l\in\Lambda} D(f_l)$.

(3) I, J が A のイデアルならば $D(I) \cap D(J) = D(IJ)$. 但し $IJ := \{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \mid a_k \in I, b_k \in J\}$ は A のイデアルで, I と J の (イデアルとしての) 積と呼ばれる.

(4) A のイデアルの集合 $\{I_l \mid l \in \Lambda\}$ に対し $D(\sum_{l\in\Lambda} I_l) = \cup_{l\in\Lambda} D(I_l)$. 但し $\sum_{l\in\Lambda} I_l := \{\sum_l a_l \mid a_l \in I_l, \text{和は有限和}\}$ はイデアルの和.

例 1.1.3. k を代数閉体として 1 変数多項式環 $k[x]$ を考える. 例 1.1.1 より $\mathrm{Spec}(k[x]) = \{*\} \cup k$ であった. 各 $f \in k[x]$ について $D(f)$ を考える.

(i) 零元 $0 \in k[x]$ について $D(0) = \emptyset$,

(ii) $a \in k \setminus \{0\}$ について $D(a) = \mathrm{Spec}(k[x]) = \{*\} \cup k$.

(iii) $a \in k$ として $D(x-a)$ を考える. (0) でない素イデアル $(x-b)$ について $(x-b) \in D(x-a) \iff (x-b) \notin x-a \iff b \neq a$.

$$D(x-a) = \{*\} \cup (k \setminus \{a\}).$$

(iv) $f = a_0 \prod_{i=1}^{r} (x-a_i)^{e_r}$ なら $D(f) = \cap_{i=r}^{r} D((x-a_i)^{e_i}) = \cap_{i=1}^{r} D(x-a_i)$. よって (iii) から

$$D(f) = \{*\} \cup (k \setminus \{a_1, \ldots, a_r\}).$$

よって $\mathrm{Spec}(k[x])$ の開集合は $\emptyset$, 全体, 全体から有限個の素イデアルを除いたもの, の 3 種類になる.

特に, $\mathrm{Spec}(k[x])$ は Hausdorff 空間でない (分離公理 T_2 を満たさない). また $* = (0) \in \mathrm{Spec}(k[x])$ の閉包は全体である.

問題 1.1 $(*)$**.** k を代数閉体とする. 以下の主張を確かめよ.

(1) $k[x]_{(0)} := \{g(x)/f(x) \mid f(x), g(x) \in k[x],\ f(0) \neq 0\}$ を考えると $\mathrm{Spec}(k[x]_{(0)}) = \{(0), (x)\}$. これを $\mathrm{Spec}(k[x]_{(0)}) = \{*, 0\}$ と書くと, 開集合は $\emptyset$, $\{*\}$, $\{*, 0\}$ の 3 つ.

(2) k 係数 2 変数多項式環 $k[x, y]$ の素イデアルは以下の 3 種類である.

- (0).
- 定数でない既約多項式 f で生成される単項イデアル (f).
- $(a, b) \in k^2$ に対して $(x-a, y-b)$.

これまでは 1 つの環 A に対しそのスペクトル $\mathrm{Spec}(A)$ を考えたが, 次に環準同型 $\varphi : A \to B$ が与えられている状況を考える.

定義 1.1.4. 環準同型 $\varphi : A \to B$ に対し, 写像

$${}^a\varphi : \mathrm{Spec}(B) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A), \quad \mathfrak{p} \longmapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

は well-defined であり, 任意の $f \in A$ に対し $({}^a\varphi)^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$, つまり Zariski 位相に関して連続写像である. この ${}^a\varphi$ を φ の同伴写像とよぶ.

1.2 環の局所化とスペクトル

環とその加群の積閉集合による局所化を復習する.

定義. 環 A の**積閉集合** (multiplicatively closed subset)[*2] とは次の性質を満たす部分集合 $S \subset A$ のこと.
(i) $1_A \in S$. (ii) $f_1, f_2 \in S$ なら $f_1 f_2 \in S$.

定義 1.2.1. S を環 A の積閉集合とし, M を A 加群とする.

(1) 集合 $S \times M$ の同値関係

$$(s, m) \sim (s', m') \iff \exists t \in S,\ f(s'm - sm') \,=\, 0$$

による商集合

$$S^{-1}M \,:=\, (S \times M)/\sim$$

は以下のような A 加群の構造を持つ. 但し $\sim$ による $(s, m) \in S \times M$ の同値類を m/s と書く.

- 写像 $+ : S^{-1}M \times S^{-1}M \to S^{-1}M$ を

$$m/s + m'/s' \,:=\, (s'm + sm')/(ss')$$

で定義すると, これは well-defined で, $S^{-1}M$ は加群になる.

- 写像 $. : A \times S^{-1}M \to S^{-1}M$ を

$$a.(m/s) \,:=\, (a.m)/s$$

で定義する[*3]と, これは well-defined で, $S^{-1}M$ は A 加群になる.

この A 加群 $S^{-1}M$ を, M の S による**局所化** (localization) $S^{-1}M$ と呼ぶ.

(2) また写像 $\psi_M : M \to S^{-1}M$ を $\psi_M(m) := m/1_A$ と定義すると, これは well-defined で, A 加群の準同型になる. ψ_M を局所化に付随する準同型と呼ぶ.

定義 1.2.2. S を環 A の積閉集合とする.

(1) A 加群としての A の局所化 $S^{-1}A$ について, 写像 $\cdot : S^{-1}A \times S^{-1}A \to S^{-1}A$ を

$$a/s \cdot a'/s' \,:=\, (aa')/(ss')$$

で定めると, これは well-defined で, $S^{-1}A$ は環になる. この環 $S^{-1}A$ を A の S による**局所化**と呼ぶ.

(2) 定義 1.2.1 (2) の局所化に付随する A 加群準同型 $\psi_A : A \to S^{-1}A$ は (1) の環構造について環準同型である. この写像 ψ_A を局所化に付随する環準同型と呼ぶ.

補題 1.2.3. S を環 A の積閉集合とし, M を A 加群とする. 写像 $. : S^{-1}A \times S^{-1}M \to S^{-1}M$ を

$$a/s.(m/s') \,:=\, (a.m)/(ss')$$

で定めると, これは well-defined で, $S^{-1}M$ は $S^{-1}A$ 加群になる.

環の局所化の普遍性を思い出しておこう.

[*2] 乗法系ともいいます.

[*3] この講義ノートでは A 加群 M の構造写像 $A \times M \to M$ を $(a, m) \mapsto a.m$ とドット . で表します.

命題 1.2.4. 環の局所化 $S^{-1}A$ は次の普遍性を持つ: $\varphi : A \to B$ を環準同型であって $\varphi(S)$ の各元が B の可逆元だとすると, $\varphi' : S^{-1}A \to B$ が存在して $\varphi = \varphi' \circ \psi_A$ となる. またこのような φ' は唯一に決まる.

以下の問題 1.2 では環上の**テンソル積** (tensor product) と加群の**短完全列** (short exact sequence) の概念を用いる.

問題 1.2 ($**$ **局所化とテンソル積**)**.** A を環とし, S を A の積閉集合とする. また M を A 加群とする. 環の局所化の普遍性 (命題 1.2.4) を用いて以下が成立することを示せ.

(1) $S^{-1}A \otimes_A M \xrightarrow{\sim} S^{-1}M$.

(2) A 加群の完全列 $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ から次の $S^{-1}A$ 加群の完全列が定まる.

$$0 \longrightarrow S^{-1}M_1 \longrightarrow S^{-1}M_2 \longrightarrow S^{-1}M_3 \longrightarrow 0.$$

(3) S_1 と S_2 を A の積閉集合とする. 定義 1.2.2 (2) の環準同型 $A \to S_2^{-1}A$ による S_1 の像を S_1' と書くと, S_1' は $S_2^{-1}A$ の積閉集合であり, かつ $(S_1S_2)^{-1}M \xrightarrow{\sim} (S_1')^{-1}(S_2^{-1}M)$.

注意 1.2.5. 問題 1.2 の (1) と (2) から, テンソル積函手 $M \mapsto S^{-1}A \otimes_A M$ は完全列を保つ. 一般に環準同型 $A \to B$ は, テンソル積函手 $M \mapsto B \otimes_A M$ が完全列を保つとき, **平坦** (flat) であるという. よって局所化に付随する環準同型 $\psi_A : A \to S^{-1}A$ は平坦である.

次にスペクトラムの開基底 $D(f)$ と環の局所化と関係を説明しよう. まず環の局所化のイデアルについて, 次の主張を思い出しておく.

命題 1.2.6. 環の局所化 $S^{-1}A$ について

(1) $S^{-1}A$ の任意のイデアルは, A のイデアル I を用いて $I(S^{-1}A)$ と書ける.

(2) $\mathrm{Spec}(S^{-1}A) = \{\mathfrak{p}(S^{-1}A) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A),\ \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$.

補題 1.2.7. A を環とする. $f \in A$ について, $S := \{1, f, f^2, \ldots\}$ は A の積閉集合である. この S による局所化 $S^{-1}A$ は次の環 A_f と同型である.

$$A_f \ := \ A[x]/(fx-1).$$

ここで右辺は, 1 変数多項式環 $A[x]$ の $fx-1 \in A[x]$ の生成するイデアル $(fx-1)$ による剰余環である.

命題 1.2.8. A を環, $f \in A$ とし, A_f を $\{1_A, f, f^2, \ldots\}$ による局所化とする (補題 1.2.7 を参照). また $\psi : A \to A_f$ を局所化に付随する環準同型とする. このとき, ψ の同伴写像 ${}^a\psi : \mathrm{Spec}(A_f) \to \mathrm{Spec}(A)$ (定義 1.1.4 を参照) について, ${}^a\psi(\mathrm{Spec}(A_f)) = D(f)$ となり,

$${}^a\psi : \mathrm{Spec}(A_f) \longrightarrow D(f)$$

は同相写像である.

1.3 Hilbert の零点定理

定義. A を環, I をそのイデアルとする. 定義 1.1.2 で定めた $D(I)$ の補集合を $V(I)$ と書く. つまり

$$V(I) \ := \ \mathrm{Spec}(A) \setminus D(I) \ = \ \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \supset I\}.$$

問題 1.3 (∗)**.** $\varphi : A \to B$ を環準同型とする．準同型定理 $A/\operatorname{Ker}\varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im}\varphi \subset B$ を用いて以下を示せ．

(1) φ が全射なら, 位相空間として $\operatorname{Spec} B \simeq V(\operatorname{Ker}\varphi) \subset \operatorname{Spec}(A)$ であり, ${}^a\varphi$ は閉集合 $V(\operatorname{Ker}\varphi)$ への同相写像．特に ${}^a\varphi$ は (中への)1 対 1 写像．

(2) ${}^a\varphi$ が全射なら $V(\operatorname{Ker}\varphi) = \operatorname{Spec} A$. 特に $\operatorname{Ker}\varphi = \cap_{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)}\mathfrak{p}$.

Hilbert の零点定理には様々な形があるが, ここでは次のものを紹介する．

定理 1.3.1 (零点定理)**.** A を環, I をそのイデアルとする．このとき $f \in A$ に対して

$$f|_{V(I)} = 0 \iff f \in \sqrt{I}.$$

まず $\sqrt{I}$ の定義を思い出そう．

定義. 環 A のイデアル I に対し, $\sqrt{I} := \{f \in A \mid f^m \in I,\ \exists m \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ を I の**根基** (radical) と呼ぶ．

次に式 "$f|_{V(I)} = 0$" を説明する．

定義 1.3.2. 環 A とその素イデアル $\mathfrak{p}$ について, 積閉集合 $A \setminus \mathfrak{p}$ による局所化を

$$A_{\mathfrak{p}} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A$$

と書き, **A の $\mathfrak{p}$ での局所化**, または **$\operatorname{Spec}(A)$ の $\mathfrak{p}$ での局所環** (local ring) と呼ぶ．

命題 1.2.6 より次の主張が従う．

補題. $\operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A),\ \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$.

次の問題 1.4 (2) では $A_{\mathfrak{p}}$ の**極大イデアル** (maximal ideal) を考える．環 B の極大イデアルとは, B 自身ではないイデアルであって包含関係に関して極大なもののことであった．極大イデアル $\mathfrak{m}$ による**剰余環** (quotient ring)[*4] $B/\mathfrak{m}$ は体である．

問題 1.4 (∗)**.** A を環とする．以下の主張を示せ．

(1) A の積閉集合 S について, 補集合 $A \setminus S$ がイデアルになるとき, このイデアルは素イデアル．

(2) $\operatorname{Spec}(A)$ の $\mathfrak{p}$ での局所環 $A_{\mathfrak{p}}$ の極大イデアルは $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ のみ．

注意 1.3.3. 一般に極大イデアルを 1 つのみ持つ環のことを**局所環**と呼ぶ．問題 1.4 (2) より $\operatorname{Spec}(A)$ の $\mathfrak{p}$ での局所環 $A_{\mathfrak{p}}$ は, 一般の意味での局所環である．

定義. A を環とし, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ とする．

(1) 以下の体 $k(\mathfrak{p})$ を $\operatorname{Spec}(A)$ の $\mathfrak{p}$ での**剰余体** (residue field)[*5]と呼ぶ．

$$k(\mathfrak{p}) := A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$$

(2) $f \in A$ の $\mathfrak{p}$ での値とは, 局所化に付随する環準同型と自然な射影の合成による f の像 $\overline{f}$ のことである．つまり

$$A \longrightarrow A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow k(p), \quad f \longmapsto f/1_A \longmapsto \overline{f} := (f/1_A \mod pA_{\mathfrak{p}}).$$

[*4] 商環とも訳します．

[*5] 分数体 (field of fractions) は商体 (quotient field) とも呼ばれます．訳語が似ていますが, 剰余体は商体とは別の概念です．

$f \in A$ と部分集合 $T \subset \mathrm{Spec}(A)$ について, 任意の $\mathfrak{p} \in T$ での f の値が 0 になるとき, $f|_T = 0$ と書くことにする. これで $f|_{V(I)} = 0$ の説明が終わった.

定理 1.3.1 の証明はしないが, 次の主張の証明に帰着されることだけ注意しておく.

命題 1.3.4. 環 A のイデアル I について

$$\cap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} = \sqrt{I}.$$

命題 1.3.4 自体も有用な主張である. 定理 1.3.1 及び命題 1.3.4 から次の主張が得られる.

系 1.3.5. 環 A とそのイデアル I, J について

(1) $\mathrm{Spec}(A) = \emptyset \iff A = 0$.
(2) $V(I) \subset V(J) \iff \sqrt{I} \supset \sqrt{J}$.
(3) $V(I) = V(J) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}$.

1.4 Zariski 位相の性質

例 1.1.3 で見たように, 環 A のスペクトラム $\mathrm{Spec}(A)$ は Hausdorff 位相空間ではない. よって微分可能多様体における議論の多くは, そのままでは成立しない. しかし, 次の命題が主張するように, $D(f) \subset \mathrm{Spec}(A)$ はコンパクト性を満たす. その意味で Zariski 位相はあまり難しくないものとも言える.

命題. 環 A の任意の元 $f \in A$ について, $D(f)$ は**準コンパクト** (quasi-compact)[*6]. つまり $D(f) = \cup_{i \in I} D(f_i)$ と開集合の基底で覆ったとき, 有限部分集合 $J \subset I$ があって $\cup_{i \in J} D(f_i)$.

証明. 被覆に用いた $\{f_i \in A \mid i \in I\}$ に対しイデアルの和 $\mathfrak{a} := \sum_{i \in I}(f_i)$ を考えると $V(f) = V(\mathfrak{a})$. よって Hilbert の零点定理 (定理 1.3.1) から $f^m \in \mathfrak{a}$ なる $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ がある. よって $f^m = \sum_{i \in J} f_i g_i$ となる有限部分集合 $J \subset I$ と $g_i \in A$ が存在する. 従って $f^m \in \sum_{i \in J}(f_i)$, すなわち $V(f) = V(f^m) \supset \cap_{i \in J} V(f_i)$. これから $D(f) = \cup_{i \in J} D(f_i)$ が従う. □

次にスペクトラムの 1 点部分集合について考える. Hausdorff 空間の 1 点集合は全て閉集合だが,

補題 1.4.1. A を環とし, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ とする. 1 点集合 $\{\mathfrak{p}\} \subset \mathrm{Spec}(A)$ について, $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$.

証明. 次の議論から従う.

$$\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \bigcap_{F:\ \mathfrak{p}\ \text{を含む閉集合}} F = \bigcap_{I \subset \mathfrak{p}} V(I) = V(\mathfrak{p}).$$

□

定義. 位相空間 X の点 $x \in X$ は, $\{x\}$ が閉集合の時, **閉点** (closed point) という.

補題 1.4.1 から直ちに

命題. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ が閉点 $\iff$ $\mathfrak{p}$ は極大イデアル.

次に既約性について考える.

[*6] Hausdorff でないので "準" という接頭語をつけています.

定義. 位相空間 X が**既約** (irreducible) であるとは, $X = F_1 \cup F_2$ と閉集合の和で書けるならば $X = F_1$ または $X = F_2$ となることを言う.

命題 1.4.2. I を環 A のイデアルとすると, $V(I)$ が既約 $\iff$ $\sqrt{I}$ が素イデアル.

問題 1.5 (∗)**.** (1) Hilbert の零点定理の系 1.3.5 を用いて命題 1.4.2 を示せ.

(2) 閉集合 $\overline{\{\mathfrak{p}\}} \subset \mathrm{Spec}(A)$ を相対位相で位相空間とみなすと, それは既約であることを示せ.

最後に生成点の概念を導入しよう.

定義 1.4.3. 位相空間 X とその点 $x, y \in X$ について,

(1) $y \in \overline{\{x\}}$ の時, x を y の**一般化** (generalization), y を x の**特殊化** (specialization) と呼ぶ.

(2) $\overline{\{x\}} = X$ の時, x を X の**生成点** (generic point) と呼ぶ.

問題 1.6 (∗)**.** 定義 1.4.3 において $X = \mathrm{Spec}(A)$ の場合を考える, $x = \mathfrak{p}$, $y = \mathfrak{q}$ と素イデアルで書き直すと, 次のようになる[*7]ことを確認せよ.

$$\overline{\{x\}} \ni y \iff \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}.$$

問題 1.6 より $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \iff \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. 特に

補題. $\mathrm{Spec}(A)$ の生成点は高々 1 つしか存在しない.

問題 1.7 (∗)**.** $\mathrm{Spec}(A)$ の生成点は高々 1 つしか存在しないことの別証を, 次の 2 つを示すことで与えよ.

(1) $\mathrm{Spec}(A)$ は T_0 空間, つまり任意の 2 点 $x, y \in \mathrm{Spec}(A)$ に対し開集合 U が存在して $x \in U$ かつ $y \notin U$.

(2) 既約な T_0 空間の生成点は高々 1 つしか存在しない.

1.5 アフィンスキーム

アフィンスキームはスペクトラムとその構造層の組のことであった. まず層の概念を復習しよう. これ以降, 所々で**圏論**の基本的な概念を用いることにする.

定義. X を位相空間とする.

(1) X の開集合とその間の包含写像のなす圏 $\mathcal{O}pen(X)$ から集合と写像のなす圏 $(\mathcal{S}ets)$ への反変函手 $\mathcal{F}$ を, X 上の**集合の前層** (presheaf of sets) と呼ぶ. 即ち, 集合の前層 $\mathcal{F}$ は次の (I) と (II) を与える.

(I) X の各開集合 U に対し, 集合 $\mathcal{F}(U)$ が定まる.

(II) 開集合の包含写像 $U_1 \hookleftarrow U_2$ に対し写像 $r_{U_1,U_2} : \mathcal{F}(U_1) \to \mathcal{F}(U_2)$ が定まり, 次の 2 つを満たす.

(a) 恒等写像 $\mathrm{id}_U : U \overset{=}{\longleftarrow} U$ に対しては恒等写像 $r_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)} : \mathcal{F}(U) \overset{=}{\longrightarrow} \mathcal{F}(U)$ が対応する.

(b) $U_1 \hookleftarrow U_2 \hookleftarrow U_3$ のときは $r_{U_2,U_3} \circ r_{U_1,U_2} = r_{U_1,U_3} : \mathcal{F}(U_1) \to \mathcal{F}(U_3)$.

写像 r_{U_1,U_2} は**制限写像** (restriction map) と呼ばれる.

[*7] ver. 0.5 で typo を直しました.

(2) X 上の集合の前層 $\mathcal{F}$ は更に次の条件を満たすとき**集合の層** (sheaf of sets) と呼ばれる.

(III) 開集合の開被覆 $U = \cup_{i\in I} U_i$ に対し

- $s, t \in \mathcal{F}(U)$ が任意の $i \in I$ に対し $r_{U,U_i}(s) = r_{U,U_i}(t)$ を満たすなら $s = t$.
- $\{s_i \in \mathcal{F}(U_i) \mid i \in I\}$ が $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ なる任意の $i, j \in I$ に対して $r_{U_i, U_i\cap U_j}(s_i) = r_{U_j, U_i\cap U_j}(s_j)$ を満たすなら, ある $s \in \mathcal{F}(U)$ があって任意の $i \in I$ に対し $s_i = r_{U,U_i}(s)$.

前半の条件を**局所性** (locality) 条件, 　後半の条件を**張り合わせ** (gluing) 条件という.

(3) 集合の前層や層の定義で, 集合の圏 $(\mathcal{S}ets)$ を群, 加群, 環とその準同型のなす圏 $(\mathcal{G}rp), (\mathcal{M}od), (\mathcal{R}ing)$ に置き換えたものをそれぞれ**群, 加群, 環の前層や層** ((pre)sheaf of groups, modules, rings) と呼ぶ.

注意. 添え字を簡単にするため, 制限写像を $s \mid V := r_{U,V}(s)$ と略記することもある. 層 $\mathcal{F}$ の制限写像であることを強調するときは $r^{\mathcal{F}}_{U,V}$ と書く.

次に stalk と germ[*8] を説明する. **帰納極限** (inductive limit) ないし**順極限** (direct limit) を $\varinjlim$ で表す[*9].

定義. 位相空間 X 上の層 $\mathcal{F}$ と $x \in X$ に対し,

(1) $\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U\ni x} \mathcal{F}(U)$ を $\mathcal{F}$ の x における **stalk** という. 但し帰納極限は, x の開近傍とそれらの包含写像のなす帰納系に関して取っている.

(2) $\mathcal{F}_x$ の元を x における **germ** という.

注意. 帰納極限の定義から次のことが分かる. $x \in X$ における $\mathcal{F}$ の germ は, 開近傍 $U \ni x$ と元 $s \in \mathcal{F}(U)$ の組 (U, s) の, 以下で定まる同値関係 $\sim$ による同値類 $\langle U, s\rangle$ と表せる.

$$(U, s) \sim (V, t) \iff \text{開近傍 } W \ni x \text{ で } W \subset U \cap V \text{ なるものがあって } s \mid W = t \mid W.$$

次に構造層の定義を復習しよう. 構造層はスペクトラム $\mathrm{Spec}(A)$ 上の環層である. $\mathrm{Spec}(A)$ の開基底は $\{D(f) \mid f \in A\}$ と書けた. また命題 1.2.8 より $D(f) \simeq \mathrm{Spec}(A_f)$ であった.

定理 1.5.1. $\mathrm{Spec}(A)$ 上の環層 $\widetilde{A}$ であって $\widetilde{A}(D(f)) = A_f$ となるものが唯一存在する.

証明の説明の前に定義だけしておくと

定義. 環 A のスペクトラム $\mathrm{Spec}(A)$ とその上の環層 $\widetilde{A}$ の組

$$(\mathrm{Spec}(A), \widetilde{A})$$

を A に付随した**アフィンスキーム** (affine scheme) という. また $\widetilde{A}$ をアフィンスキームの**構造層** (structure sheaf) と呼ぶ.

定理 1.5.1 の証明の概略. まず $D(f) = D(g)$ なら $A_f \simeq A_g$ であることを確認しておく. $D(f) = D(g) = D(fg)$ となることに注意して, 環準同型 $A_f \to A_{fg}$ を $a/f^m \mapsto ag^m/(f^m g^m)$ で定義する. これが同型になることが, Hilbert の零点定理の系 1.4.2 (3) より $D(f) = D(g) \iff \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$ となることを用いて示せる.

次に $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ に注意して, 環準同型 $r_{D(f),D(fg)} : A_f \to A_{fg}$ を前と同様に $a/f^m \mapsto ag^m/(f^m g^m)$ で定義しておく.

[*8] stalk を茎, germ を芽と訳すのが伝統的ですが, あまり使いません.

[*9] ホモトピー論では順極限のことを**余極限** (colimit) と呼び, 記号 colim を使います.

任意の開集合 $U \subset \mathrm{Spec}(A)$ を $U = \cup_{i\in I} D(f_i)$ と被覆しておく. そして

$$\widetilde{s} = (s_i)_{i\in I},\ s_i \in A_{f_i},\ s_i \,|\, D(f_i f_j) = s_j \,|\, D(f_i f_j) \quad \forall i, j \in I$$

を考える. 別の被覆 $U = \cup_{j\in J} D(g_j)$ についても同様の条件を満たす $\widetilde{t} = (t_j)_{j\in J}$ を考える. そして

$$\widetilde{s} \sim \widetilde{t} \iff s_i \,|\, D(f_i g_j) = t_j \,|\, D(f_i g_j) \quad \forall i \in I,\, j \in J$$

と同値関係を定め,

$$\widetilde{A}(U) := \{\widetilde{s}\}/\sim$$

と定義する. これで環の前層が定まることが簡単に分かる.

層であることを示すには, $U = D(f)$ が $D(f) = \cup_{i\in I} D(f_i)$ と被覆される場合を考えれば十分. よって次の 2 つを示せばよい.

- $a \in A_f$ が全ての $i \in I$ において $a \,|\, D(f_i) = 0$ を満たすなら $a = 0 \in A_f$.
- $\{a_i \in A_{f_i} \mid i \in I\}$ が全ての $i \in I$, $j \in J$ に対し $a_i \,|\, D(f_i f_j) = a_j \,|\, D(f_i f_j)$ を満たすなら, ある $a \in A_f$ があって $a_i = a \,|\, D(f_i)$.

□

説明を省いた部分については [H77, p.71, Proposition 2.2, Chap.II §2] を参照[*10] せよ.

以上で A から $\mathrm{Spec}(A)$ 上の環層 $\widetilde{A}$ を作ったが, 同様に A 加群から $\mathrm{Spec}(A)$ 上の $\widetilde{A}$ 加群層が作れる. ここで $\widetilde{A}$ 加群層の定義を正確に述べると

定義 1.5.2. X を位相空間, $\mathcal{O}$ を X 上の環層とする. X 上の $\mathcal{O}$ **加群層** (sheaf of $\mathcal{O}$-modules) $\mathcal{M}$ とは, X 上の加群層であって更に以下の 2 条件を満たすもののことである.

- 各開集合 $U \subset X$ について $\mathcal{M}(U)$ は環 $\mathcal{O}(U)$ 上の加群.
- 更に $\mathcal{O}(U)$ 加群の構造が制限写像と整合的. つまり, $r^{\mathcal{O}}_{U,V}$ を $\mathcal{O}$ の制限写像, $r^{\mathcal{M}}_{U,V}$ を $\mathcal{M}$ の制限写像として, 任意の $a \in \mathcal{O}(U)$ と $m \in \mathcal{M}(U)$ に対して $r^{\mathcal{O}}_{U,V}(a).r^{\mathcal{M}}_{U,V}(m) = r^{\mathcal{M}}_{U,V}(a.m)$.

$\widetilde{A}$ 加群層の構成に用いる記号を 1 つ用意しておく.

定義. A 加群 M と $f \in A$ に対し, 積閉集合 $S := \{1, f, f^2, \ldots\}$ による M の局所化 $S^{-1}M$ を M_f と書く.

補題 1.2.3 より M_f は A_f 加群であることに注意する.

命題 1.5.3. M を A 加群とする. $\widetilde{A}$ 加群層 $\widetilde{M}$ であって $\widetilde{M}(D(f)) = M_f$ となるものが唯一存在する.

証明の方針. 定理 1.5.1 と同様に, $U = \cup_{i\in I} D(f_i)$ について

$$\widetilde{M}(U) := \{(m_i)_{i\in I} \mid m_i \in M_{f_i},\ m_i \,|\, D(f_i f_j) = m_j \,|\, D(f_i f_j)\}/\sim$$

と定めればよい. $\widetilde{A}$ 加群の構造は M_f が A_f 加群であることから自然に定まる. □

層 $\widetilde{A}$ や $\widetilde{M}$ の stalk は簡明に記述できる. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ での局所環の記号 $A_{\mathfrak{p}}$ (定義 1.3.2) にならって,

定義. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ に対し, 積閉集合 $S := A \setminus \mathfrak{p}$ による A 加群 M の局所化 $S^{-1}M$ を $M_{\mathfrak{p}}$ と書く.

[*10] [H77] の引用ページ番号は英語版のものです.

命題 1.5.4. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ での環層 $\widetilde{A}$ および $\widetilde{A}$ 加群層 $\widetilde{M}$ の stalk はそれぞれ $(\widetilde{A})_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$, $(\widetilde{M})_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$.

注意 1.3.3 で述べたように $A_{\mathfrak{p}}$ は (一般の意味での) 局所環であった. 従ってアフィンスキームは次の定義の意味で局所環付き空間である.

定義. 位相空間 X とその上の環層 $\mathcal{O}$ の組 $(X, \mathcal{O})$ を**環付き空間** (ringed space) という. また環付き空間 $(X, \mathcal{O})$ は, 任意の $x \in X$ における stalk $\mathcal{O}_x$ が局所環であるとき, **局所環付き空間** (locally ringed space) と呼ばれる.

問題 1.8 (∗∗∗)**.** 微分可能多様体や複素多様体, ないし複素解析多様体も自然に局所環付き空間とみなせる. このことを説明せよ.

1.6 アフィンスキームの射

これ以降, (前) 層といったら加群または環の (前) 層の意味とする.

この副節ではアフィンスキームの間の射について復習する. まず層の射の定義を思い出しておこう.

定義 1.6.1. X を位相空間とする.

(1) $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ を X 上の前層とする. **前層の準同型**ないし**前層の射** (morphism of presheaves) $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とは, 反変函手としての $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ の間の自然変換のことである. つまり, 各開集合 $U \subset X$ に対して準同型 $\theta(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ が定まっていて, $U \supset V$ ならば $r^{\mathcal{G}}_{U,V} \circ \theta(U) = \theta(V) \circ r^{\mathcal{F}}_{U,V}$ となることをいう.

(2) $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ を X 上の層とする. **層の準同型**ないし**層の射** (morphism of sheaves) $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とは, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を前層とみなしたときの, 前層の射 θ のことである.

補題 1.6.2. 定義 1.6.1 の記号のもと, 各 $x \in X$ について, stalk の間の準同型

$$\theta_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$$

が存在し, 対応 $\theta \mapsto \theta_x$ は**函手的** (functorial) である. つまり恒等射 $\mathrm{id} : \mathcal{F} \xrightarrow{=} \mathcal{F}$ に対しては id_x も恒等写像であり, 層の射の列 $\mathcal{E} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F} \xrightarrow{\theta} \mathcal{F}$ に対しては $(\theta \circ \sigma)_x = \theta_x \circ \sigma_x$ となる.

注意 1.6.3. 補題 1.6.2 の主張を, まとめて "**自然** (natural) な準同型 θ_x が存在する" という.

定義 1.6.4. $f : X \to Y$ を位相空間の間の連続写像とし, $\mathcal{F}$ を X 上の層とする. 次で定まる Y 上の層 $f_*\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}$ の f による**順像** (direct image) と呼ぶ.

$$(f_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U)).$$

補題 1.6.5. 定義 1.6.4 の記号のもと, $x \in X$, $y := f(x)$ として, stalk の間の自然な準同型 $(f_*\mathcal{F})_y \to \mathcal{F}_x$ が存在する (注意 1.6.3 を参照).

証明. stalk の定義から

$$(f_*\mathcal{F})_y = \varinjlim_{U \ni y} (f_*\mathcal{F})(U) = \varinjlim_{U \ni y} \mathcal{F}(f^{-1}(U)).$$

$f^{-1}(U)$ は x を含む開集合だから, 順極限の普遍性より準同型 $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) \to \mathcal{F}_x$ がある. この準同型は制限写像と整合的だから, 再び順極限の普遍性より準同型 $(f_*\mathcal{F})_y \to \mathcal{F}_x$ を得る. □

以上の準備のもと, 環付き空間の射が次のように定義される.

定義. $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を環付き空間とする. **環付き空間の射** (morphism of ringed spaces) $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ とは, 連続写像 $f : X \to Y$ と Y 上の層準同型 $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ の組 $(f, f^\sharp)$ のことである.

環付き空間の射 $(f, , f^\sharp)$ において, f と $f^\sharp$ は独立に与えられていることに注意する.

定義 1.6.6. (1) $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を局所環付き空間とする. **局所環付き空間の射** (morphism of locally ringed spaces) $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ とは環付き空間の射 $(f, f^\sharp)$ であって, 各 $x \in X$ について局所環の準同型

$$f^\sharp_x : \mathcal{O}_{Y,y} \xrightarrow{(f^\sharp)_y} (f_*\mathcal{O}_X)_y \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

が局所的であることをいう. ここで準同型 $(f^\sharp)_y$ は補題 1.6.2 のものであり, 2 番目の準同型は補題 1.6.5 のものである.

(2) **局所環付き空間の同型** (isomorphism of locally ringed spaces) とは両側の逆射を持つ射のことである.

上の定義で局所環の準同型について次の概念を用いた.

定義. 局所環 A の極大イデアルを $\mathfrak{m}$, 局所環 B の極大イデアルを $\mathfrak{n}$ とする. 環準同型 $\varphi : A \to B$ は $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$ を満たすとき**局所的** (local) であるという.

定義. **アフィンスキームの射** (morphism of affine schemes) とは局所環付き空間としての射のことである. また**アフィンスキームの同型** (isomorphism of affine schemes) とは局所環付き空間としての同型のことである.

環準同型 $\varphi : A \to B$ から連続写像 ${}^a\varphi : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ が定まった, これからは以下の定理 1.6.7 のように自然にアフィンスキームの射が定義できる.

定義. $\varphi : A \to B$ を環準同型とし, $f \in A$ とする. φ から自然に定まる環準同型 $A_f \to B_{\varphi(f)}$ を φ_f と書く.

定理 1.6.7. $\varphi : A \to B$ を環準同型とする. アフィンスキームの射

$$({}^a\varphi, \widetilde{\varphi}) : (\mathrm{Spec}(B), \widetilde{B}) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(A), \widetilde{A})$$

であって, $f \in A$ に対し

$$\widetilde{\varphi}(D(f)) : \widetilde{A}(D(f)) = A_f \longrightarrow \big(({}^a\varphi)_*\widetilde{B}\big)(D(f)) = \widetilde{B}(D(\varphi(f))) = \widetilde{B}_{\varphi(f)}$$

が φ_f と一致するものが唯一存在する. そして対応 $\varphi \mapsto ({}^a\varphi, \widetilde{\varphi})$ は函手的である.

証明の概略. $\widetilde{\varphi}$ の定義は, $\widetilde{A}$ の定義と同様である. つまり, 一般の開集合 $U \subset \mathrm{Spec}(A)$ に対して $U = \cup_i D(f_i)$ と開被覆を取り, 各 $D(f_i)$ 上では φ_{f_i} とすることで, 環準同型 $\widetilde{\varphi}(U) : \widetilde{A}(U) \to ({}^a\varphi)_*\widetilde{B}(U)$ が一意に定まる. それが層の射になることは, $f, g \in A$ として環の図式

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{A}(D(f)) \arrow[r, equal] \arrow[d, "r_{D(f),D(fg)}"'] & A_f \arrow[r, "\varphi_f"] & B_{\varphi(f)} \arrow[r, equal] & \big(({}^a\varphi)_*\widetilde{B}\big)(D(f)) \arrow[d, "r_{D(f),D(fg)}"] \\
\widetilde{A}(D(fg)) \arrow[r, equal] & A_{fg} \arrow[r, "\varphi_{fg}"'] & B_{\varphi(fg)} \arrow[r, equal] & \big(({}^a\varphi)_*\widetilde{B}\big)(D(fg))
\end{tikzcd}$$

が可換になることから従う. この時点で $({}^a\varphi, \widetilde{\varphi})$ が環付き空間の射になることが示された.

あとは各 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B)$ について, $\mathfrak{q} := ({}^a\varphi)(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ として, stalk の間の環準同型 $\psi := \widetilde{\varphi}^\sharp_{\mathfrak{p}} : \widetilde{A}_{\mathfrak{q}} \to \widetilde{B}_{\mathfrak{p}}$ が局所環の局所的準同型であることを示せばよい. 命題 1.5.4 より $\widetilde{A}_{\mathfrak{q}} = A_{\mathfrak{q}}$ で, 準同型 ψ は

$$A_{\mathfrak{q}} = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{q}} A_f \longrightarrow \varinjlim_{f \notin \mathfrak{q}} B_{\varphi(f)} \longrightarrow B_{\mathfrak{p}}$$

と書けて, 最初の準同型は φ から自然に定義されるものである. すると, $a \in \mathfrak{q}$ なら $\varphi(a) \in \mathfrak{p}$ であることと合わせて, $\psi(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}) \subset \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ が分かる. よって ψ が局所的であることが示せた. □

実は更に次の定理が知られている.

定理 1.6.8. アフィンスキームの間の射 $(f, \theta) : (\mathrm{Spec}(A), \widetilde{A}) \to (\mathrm{Spec}(B), \widetilde{B})$ は, ある環準同型 $\varphi : B \to A$ から作られた $({}^a\varphi, \widetilde{\varphi})$ と一致する.

ここでは証明しない. [H77, p.73, Proposition 2.3 (c)] を参照せよ.
定理 1.6.7 と定理 1.6.8 の主張を圏論的にまとめると,

系 1.6.9. 函手 Spec は環の圏とアフィンスキームの圏の間の反変同値を与える.

参考文献

[H77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer, 1977;
高橋宣能, 松下大介訳, **代数幾何学 1,2,3**, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2008.

以上です.