数学演習 VII・VIII　7 月 26 日分解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

14　復習 4

14.1　群論

問題 14.1. 任意の元 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が $S^{\pm 1}$ と $T^{\pm 1}$ の有限個の積で書けることを示せばよい.

まず $|b| > 0$ と仮定して, $b = 0$ の場合に帰着できることを示す. $|a| = n|b| + r$, $0 \le r < |b|$ となる非負整数 n と r が一意に定まる. この n を用いて $A' := AT^{\pm n}$ を考える. $a/b \ge 0$ なら

$$AT^{-n} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b - na \\ c & d - nc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \pm r \\ c & d - nc \end{pmatrix}$$

となり, $b/a < 0$ なら

$$AT^{n} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + na \\ c & d + nc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \pm r \\ c & d + nc \end{pmatrix}$$

となる. どちらにせよ $A' = \begin{pmatrix} a & \pm r \\ c & d' \end{pmatrix}$ と書けて, $(|a|, |b|)$ の場合を $(|a|, |r|)$ の場合に帰着できる. 更に右から S をかけることで, $A'S = \begin{pmatrix} \mp r & a \\ -d' & c \end{pmatrix}$ となり, $(|r|, |a|)$ の場合に帰着できる. この操作を繰り返すことで, 有限回のうちに $(*, 0)$ の場合に帰着できることが, Euclid の互除法と同様の議論から従う.

そこで以下 $b = 0$ と仮定する. すると $ad - bc = 1$ から $a = d = \pm 1$ となる. $a = 1$ なら $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = S^{-1}T^{-c}S$, $a = -1$ なら $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix} = ST^{c}S$ と書けるので, 主張が示せた.

問題 14.2. B, N, T が (集合としては) 以下のように書けることに注意する.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b & c \\ & a_2 & d \\ & & a_3 \end{pmatrix} \middle| a_1 a_2 a_3 \neq 0 \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ & 1 & z \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad T = \left\{ \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3) \mid a_1 a_2 a_3 \neq 0 \right\}.$$

(1) 積で閉じていることは明らか. B と N において逆元が存在することは, 逆行列の余因子行列による表示から従う.

(2)
$$\begin{pmatrix} a_1 & b & c \\ & a_2 & d \\ & & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b/a_2 & c/a_3 \\ & 1 & d/a_3 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}$$

[*1] 2018/06/04 版, ver. 0.1.

となることに注意する．そこで (集合の間の) 写像 $\iota : B \to N \times T$ を

$$\iota \begin{pmatrix} a_1 & b & c \\ & a_2 & d \\ & & a_3 \end{pmatrix} := \left(\begin{pmatrix} 1 & b/a_2 & c/a_3 \\ & 1 & d/a_3 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3) \right)$$

と定めれば，ι は全単射である．そして

$$\varphi : T \longrightarrow \operatorname{Aut}(N), \quad \varphi_{\operatorname{diag}(a_1,a_2,a_3)} \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ & 1 & z \\ & & 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & xa_1/a_2 & ya_1/a_3 \\ & 1 & za_2/a_3 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

と定める．半直積 $N \rtimes_\varphi T$ における積は

$$\begin{aligned}
&\iota \begin{pmatrix} a_1 & xa_2 & ya_3 \\ & a_2 & za_3 \\ & & a_3 \end{pmatrix} \cdot \iota \begin{pmatrix} a_1' & x'a_2' & y'a_3' \\ & a_2' & z'a_3' \\ & & a_3' \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ & 1 & z \\ & & 1 \end{pmatrix}, \operatorname{diag}(a_1,a_2,a_3) \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & x' & y' \\ & 1 & z' \\ & & 1 \end{pmatrix}, \operatorname{diag}(a_1',a_2',a_3') \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ & 1 & z \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \varphi_{\operatorname{diag}(a_1,a_2,a_3)} \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \\ & 1 & z' \\ & & 1 \end{pmatrix}, \operatorname{diag}(a_1a_1', a_2a_2', a_3a_3') \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ & 1 & z \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x'a_1/a_2 & y'a_1/a_3 \\ & 1 & z'a_2/a_3 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \operatorname{diag}(a_1a_1', a_2a_2', a_3a_3') \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & x + x'a_1/a_2 & y + xz'a_2/a_3 + y'a_1/a_3 \\ & 1 & z + z'a_2/a_3 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \operatorname{diag}(a_1a_1', a_2a_2', a_3a_3') \right) \\
&= \iota \begin{pmatrix} a_1a_1' & xa_2a_2' + x'a_1a_2' & ya_3a_3' + xz'a_2a_3' + y'a_1a_3' \\ & a_2a_2' & za_3a_3' + z'a_2a_3' \\ & & a_3a_3' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となり，$\iota : B \to T \ltimes_\varphi N$ が群準同型であることが確認できる．よって $B \simeq T \ltimes_\varphi N$.

問題 14.3 $(*)$**.**　(1) $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ の部分群であることを示せばよい．単位元 I_3 を含むことは明らか．$A, B \in \mathrm{SO}(3)$ なら $(AB)^t(AB) = AB^tB^tA = A^tA = I_3$ より $AB \in \mathrm{SO}(3)$. また $A \in \mathrm{SO}(3)$ なら $A^{-1} = {}^tA$ なので，$A^{-1t}(A^{-1}) = {}^tAA = A^{-1}A = I_3$ となり $A^{-1} \in \mathrm{SO}(3)$ が従う．

(2) $A \in \mathrm{SO}(3)$, $v \in S^2$ なら $Av \in S^2$ となることを示せば十分．$w \in S^2 \iff w = 1$ だが，$|Av|^2 = {}^t(Av) \cdot (Av) = {}^tv^tAAv = {}^tvv = 1$ より $|Av| = 1$ となり，示せた．

(3) 軌道は $\{S^2\}$ の 1 つだけ．

任意の $u \neq v \in S^2$ に対しある $A \in \mathrm{SO}(3)$ があって $A.u = v$ となることを示せばよい．$w := u \times v$ (3 次元ベクトルの外積)，$v' := w \times u$ とすれば $\{u, v', w\}$ は正規直交基底になるので，この 3 つのベクトルを並べてできる 3 次正方行列 $B := (u, v', w)$ は $\mathrm{SO}(3)$ の元になる．そして $\mathbb{R}^3$ の標準基底 e_1, e_2, e_3 について $Be_1 = u$, $Be_2 = v'$, $Be_3 = w$ となる．同様に $u' := v \times w$ とすれば $\{v, w, u'\}$ も正規直交基底になり，$C := (v, w, u') \in \mathrm{SO}(3)$. また $Ce_1 = v$, $Ce_2 = w$, $Ce_3 = u'$. そこで $A := CB^{-1} \in \mathrm{SO}(3)$ とすれば $A.u = C.(B.u) = C.e_1 = v$.

14.2 Lebesgue 積分論

問題 14.4. f の連続性より $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^2$ は閉集合なので Lebesgue 可測. $\Gamma_n := \Gamma(f) \cap \{(x,y) \mid n \le x < n+1\}$ として, 各 $n \in \mathbb{Z}$ について, 区間 $[n, n+1]$ を十分細かく等分することで $\mu(\Gamma_n) = 0$ が示せる. あとは可算和を取って $\mu(\Gamma(f)) = 0$.

問題 14.5. Lebesgue 可測関数 f による開集合の逆像が Lebesgue 可測であることを示せば十分. このことを示すには, 逆像が Lebesgue 可測になるような集合全体が完全加法族をなすことから従う. 完全加法族の 3 条件は容易に確認できる.

問題 14.6. (1) 単調収束定理が適用できて

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} f(x-q_k)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} f(x-q_k)\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\int_{q_k}^{1+q_k}(x-q_k)^{-1/2}\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1} = 2 < \infty.\end{aligned}$$

従って g は $\mathbb{R}$ 上可積分.

(2) $(g * g)(q_n)$ を考える. $0 < q_n < 1$ なら, $0 < x < q_n$ において $(q_n - x)^{-1/2}x^{-1/2} \ge (2x)^{-1}$ なので, $g * g$ は可積分ではないことが分かる. そのほかの q_n でも同様. $\{q_n\} = \mathbb{Q}$ は稠密なので主張が示せた.

14.3 微分方程式

問題 14.7. $y'' + \lambda y = 0$ の一般解は $y = C_1 e^{i\lambda^{1/2}x} + C_2 e^{-i\lambda^{1/2}x}$. $y(0) = 0$ から $C_1 + C_2 = 0$ なので $y = C\sin(\lambda^{1/2}x)$ と書ける. すると $y(L) = 0$ から $\lambda^{1/2}L \in \pi\mathbb{Z}$. これから必要条件として $\lambda = n^2\pi^2/L^2$ と書けることが分かる. 逆にこの時 $y = C\sin(n\pi x/L) \not\equiv 0$ が与えられた境界問題の解になっている.

上の議論から $y_n = C\sin(n\pi x/L)$ となる.

問題 14.8. c_1, c_2, c_3 を積分定数として, 一般解は

$$y = Y_1(x)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + Y_2(x)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

但し Y_1, Y_2 は次のように定まる行列値関数.

$$\begin{aligned}Y_1(x) &:= \cos(\|b\|x)\,(I_3 - P) + P + \frac{\sin(\|b\|x)}{\|b\|}B, \\ Y_2(x) &:= \frac{\sin(\|b\|x)}{\|b\|}\,(I_3 - P) + xP + \frac{1-\cos(\|b\|x)}{\|b\|^2}B, \\ \|b\| &:= \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}, \quad P := \left(b_i b_j/\|b\|^2\right)_{i,j=1}^{3}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

与えられた方程式は $y' = By + a$ と書ける. まず $y' = By$ の一般解を求める.

B の固有方程式は $\det(tI_3 - B) = 0 \iff t(t^2 + \|b\|^2) = 0$ となるので, 適当な正則行列 Q を用いて $QBQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ||b|| \\ 0 & -||b|| & 0 \end{pmatrix}$ とできる. これから一般解が $y = Y_1(x)c$ と書けることが分かる.

あとは定数変化法から $Y_2(x)a$ の部分が従う.

問題 14.9 $(*)$**.** 不動点は $x' = y' = 0 \iff \cos(\pi x) = \cos(\pi y) = 0$ より xy 平面の格子点全て. 解のふるまいは, x, y がともに偶数なら源点, ともに奇数なら沈点, 偶奇が一致しなければどちらでもない.

以上です.