数学演習 VII・VIII　7 月 26 日分問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

14　復習 4

前回に引き続き, 総合演習です. 各問題の冒頭にある $*$ の数は, その問題の難易度の目安を表しています.

14.1　群論

問題 14.1 ($*$)**.** 整数成分の 2 次特殊線形群

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc=1 \right\}$$

が次の 2 元で生成されることを示せ.

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

問題 14.2 ($**$)**.** 複素数成分の 3 次一般線形群 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ の部分集合 B, N, T を次のように定義する.

$$\begin{aligned} B &:= \{(a_{i,j})_{i,j=1}^3 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \mid a_{ij} = 0 \text{ if } i > j\}, \\ N &:= \{(a_{i,j})_{i,j=1}^3 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \mid a_{ij} = 0 \text{ if } i > j,\ a_{ii} = 1\ \forall i = 1,2,3\}, \\ T &:= \{(a_{i,j})_{i,j=1}^3 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \mid a_{ij} = 0 \text{ if } i \neq j\}. \end{aligned}$$

(1) B, N, T が $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ の部分群であることを示せ.

(2) B が N と T の半直積 (§13 の問題 13.4 を参照) であること, つまり群の準同型 $\varphi : T \to \mathrm{Aut}(N)$ があって $B = T \ltimes_\varphi N$ と書けることを示せ.

問題 14.3 ($*$)**.** 3 次特殊直交群 $\mathrm{SO}(3) := \{A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \mid A\,{}^tA = I_3,\ \det A = 1\}$ を考える.

(1) $\mathrm{SO}(3)$ が群であることを確認せよ.

(2) 2 次元球面 $S^2 = \{v = {}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ に $\mathrm{SO}(3)$ が $A.v := Av$ (行列とベクトルの乗法) で作用することを確認せよ.

(3) (2) の群作用における軌道を全て求めよ.

14.2　Lebesgue 積分論

この副節では, 測度は全て Lebesgue 測度とし, 積分も Lebesgue 積分の意味とします.

問題 14.4 ($*$)**.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とする. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $\Gamma(f) := \{(x,y) \mid y = f(x)\}$ について, これが可測集合であることを示し, その測度を求めよ.

問題 14.5 ($*$)**.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を可測関数, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数とする. このとき合成関数 $g \circ f$ は可測関数であることを示せ.

[*1] 2018/06/04 版, ver. 0.1.

問題 14.6 (**$**$**)**. $\mathbb{R}$ 上の関数 f を

$$f(x) := \begin{cases} x^{-1/2} & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

と定める. $\mathbb{Q}$ が可算集合であることに注意して, $\mathbb{Q}$ の番号付け $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ を 1 つ取って固定する. そして関数 $\mathbb{R}$ 上の関数 g を次のように定める.

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x - q_n)$$

(1) g が $\mathbb{R}$ 上の可積分関数であることを示せ.

(2) g とそれ自身の畳み込み積

$$(g * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x-y)g(y)\,dy$$

を考える. $(g * g)(x)$ が有限でないような $x \in \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ 上稠密に存在することを示せ.

14.3 微分方程式

問題 14.7 ($*$)**.** $L \in \mathbb{R}_{>0}$ とする. 境界条件付き微分方程式

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = y(L) = 0$$

に恒等的に 0 でない解 $y(x) \not\equiv 0$ が存在するための必要十分条件は

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

であることを示し, またその時の解 $y = y_n(x)$ を求めよ.

問題 14.8 ($**$)**.** 次の微分方程式の一般解を求めよ. 但し $b_1, b_2, b_3, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ とする.

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

問題 14.9 ($*$)**.** 次の $\mathbb{R}^2$ 上の方程式系の不動点を全て求め, 各不動点の周りでの解のふるまいを記述せよ.

$$\frac{dx}{dt} = \sin(\pi x), \quad \frac{dy}{dt} = \sin(\pi y).$$

問題の幾つかは以下の本から抜粋しました.

- 坂井秀隆, **常微分方程式**, 大学数学の入門 **10**, 東京大学出版会 (2015).
- E. M. Stein, R. Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*, Princeton lectures in Analysis Ⅲ, Princeton University Press (2005);
  日本語訳: エリアス・M. スタイン, ラミ・シャカルチ著, 新井仁之, 杉本充, 高木啓行, 千原浩之訳, **プリンストン解析学講義 Ⅲ 「実解析」測度論, 積分, およびヒルベルト空間**, 日本評論社 (2017).

以上です.