数学演習 VII・VIII　7 月 19 日分小テスト解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

問題. $a \in \mathbb{R}$ とし, J を対角成分が a の n 次 Jordan ブロックとする. 次の連立常微分方程式を考える.

$$(\star) \qquad \frac{dy}{dx}(x) \ = \ J\,y(x), \qquad J \ := \begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{pmatrix} \quad (\text{書かれていない成分は } 0).$$

但し $y(x) \in \mathbb{R}^n$ は縦ベクトルとみなしている. $j = 1, \ldots, n$ に対し, $e_j \in \mathbb{R}^n$ を j 番目の成分が 1 で他の成分が 0 の元とし, $y_j(x) := \exp(xJ)e_j$ とする.

(1) $y_j(x)$ 達が微分方程式 $(\star)$ の線形独立な解であることを示せ.

(2) $j = 1, \ldots, n$ について, $y_j(x)$ の各成分を計算せよ.

解答. (1) $\exp(xJ)' = J\exp(xJ)$ より $y_j' = Jy_j$. また y_j 達を並べて得られる n 次正方行列 $(y_1, \ldots, y_n)$ について

$$\begin{aligned} \det\bigl(y_1, \ldots, y_n\bigr) \ &= \ \det\bigl(\exp(xJ) \cdot (e_1, \ldots, e_n)\bigr) \ = \ \det\bigl(\exp(xJ) \cdot I_n\bigr) \\ &= \ \det\bigl(\exp(xJ)\bigr) \ = \ \exp\bigl(x\,\mathrm{tr}(J)\bigr) \ = \ \exp\bigl(nax\bigr) \neq 0 \end{aligned}$$

より y_j 達は線形独立である.

(2) 上の議論から $(y_1, \ldots, y_n) = \exp(xJ)$ が分かる. 行列の指数関数の計算から

$$(y_1, \ldots, y_n) \ = \ \exp(xJ) \ = \begin{pmatrix} e^{ax} & xe^{ax} & x^{[2]}e^{ax} & \cdots & x^{[n-1]}e^{ax} \\ & e^{ax} & xe^{ax} & \cdots & x^{[n-2]}e^{ax} \\ & & e^{ax} & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & xe^{ax} \\ & & & & e^{ax} \end{pmatrix}$$

となる. 但し $x^{[k]} := x^k/k!$. よって $y_j(x)$ の第 i 成分を y_{ij} と書くと

$$y_{ij} \ = \ \begin{cases} x^{[j-i]}e^{ax} & (i \le j) \\ 0 & (i > j) \end{cases}.$$

コメント. $2+3$ 点で採点しました. 平均点は 1.8 点でした. この問題は完答できるようにして下さい.

行列の指数関数に関する等式 $\exp(xA)' = A\exp(xA) = \exp(xA)A$ や $\det\bigl(\exp(A)\bigr) = \exp(\mathrm{tr}(A))$ は証明も含めて復習しておいて下さい.

以上です.

[*1] 2018/07/19 版, ver. 0.1.