

## 数学演習 VII・VIII 7月19日分解答\*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida>

## 13 復習 3

## 13.1 群論

**問題 13.1.**  $s := (1, 2)$ ,  $c := (1, 2, \dots, n)$  と置き,  $G := \langle s, c \rangle \subset S_n$  とする.  $G = S_n$  を証明すれば良い.  $n$  に関する帰納法で示す.  $n = 2$  の時は明らか.

$t := (1, n)$  とする.  $c^{-1}sc = (c^{-1}(1), c^{-1}(n)) = (n, 1) = t$  より  $t \in G$ . すると  $tc = (1, 2, \dots, n-1) \in G$ .  $S_n$  の元のうち  $n$  を固定するものは  $S_{n-1} \subset S_n$  の元と思えるので, 帰納法の仮定から  $(1, 2) = s$  と  $(1, 2, \dots, n-1) = tc$  の積で書ける. よって  $G$  に含まれる.  $S_n$  の元  $\sigma$  で  $n$  を固定しないものについて,  $m := \sigma(n) \neq n$  とおくと  $c^{n-m}\sigma$  は  $n$  を固定するので, 前半の議論より  $G$  に含まれる. よって  $\sigma$  自身も  $G$  に含まれる. 以上で証明が終わった.

**問題 13.2.**  $m$  と  $n$  が互いに素であることが求める条件.

$C_m \times C_n$  が巡回群ならば,  $|C_m \times C_n| = mn$  より  $C_m \times C_n \simeq C_{mn}$  なので, 位数が  $mn$  の元があるための必要十分条件を求めればよい.  $m = 1$  または  $n = 1$  ならば明らかに  $C_m \times C_n \simeq C_{mn}$  なので, 以下では  $m > 1$  かつ  $n > 1$  とする.

$q := \gcd(m, n)$  とする.  $C_m$  の生成元を  $g$ ,  $C_n$  の生成元を  $h$  と書く.  $C_m \times C_n$  の任意の元は  $g^a h^b = (g^a, h^b)$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  と書ける.  $a, b > 0$  のとき,  $g^a h^b$  の位数は

$$(g^a h^b)^r = e \iff g^{ar} h^{br} = e \iff g^{ar} = e, h^{br} = e \iff m \mid ar, n \mid br \iff (mn/q) \mid ar, br$$

より,  $m$  と  $n$  の最小公倍数  $mn/q$  を超えない.

$q = 1$  なら  $\text{ord}(gh) = mn$  なので位数  $mn$  の元が存在する. よって  $C_m \times C_n = \langle gh \rangle \simeq C_{mn}$ .

$q > 1$  なら, 任意の  $a, b$  について  $\text{ord}(g^a h^b) \leq mn/q < mn$  なので, 位数  $mn$  の元は存在しない. 従って巡回群にはならない

**問題 13.3.** 結合則について.

$$\begin{aligned} ((h_1, n_1) * (h_2, n_2)) * (h_3, n_3) &= (h_1 h_2, n_1 \varphi_{h_1}(n_2)) * (h_3, n_3) = (h_1 h_2 h_3, n_1 \varphi_{h_1}(n_2) \varphi_{h_1 h_2}(n_3)), \\ (h_1, n_1) * ((h_2, n_2) * (h_3, n_3)) &= (h_1, n_1) * (h_2 h_3, n_2 \varphi_{h_2}(n_3)) = (h_1 h_2 h_3, n_1 \varphi_{h_1}(n_2 \varphi_{h_2}(n_3))) \end{aligned}$$

より  $n_1 \varphi_{h_1}(n_2) \varphi_{h_1 h_2}(n_3) = n_1 \varphi_{h_1}(n_2 \varphi_{h_2}(n_3))$  を示せば十分. それは

$$n_1 \varphi_{h_1}(n_2) \varphi_{h_1 h_2}(n_3) \stackrel{*1}{=} n_1 \varphi_{h_1}(n_2) \cdot \varphi_{h_1}(\varphi_{h_2}(n_3)) \stackrel{*2}{=} n_1 \varphi_{h_1}(n_2 \varphi_{h_2}(n_3))$$

と示せる. ここで \*1 では,  $\varphi$  が群準同型なので  $\varphi_{h_1 h_2} = \varphi_{h_1} \varphi_{h_2}$  となることを用いた. また \*2 では,  $\varphi_{h_1} \in \text{Aut}(N)$  も群準同型なので  $\varphi_{h_1}(nn') = \varphi_{h_1}(n) \cdot \varphi_{h_1}(n')$  となることを用いた.

\*1 2018/07/19 版, ver. 0.2.

単位元は  $(e_H, e_N)$  である. 実際,  $\varphi_{e_H} = \text{id}_N$  から

$$(e_H, e_N) * (h, n) = (h, e_N \cdot \varphi_{e_H}(n)) = (h, e_N \cdot n) = (h, n)$$

となり, また  $\varphi_h(e_N) = e_N$  から

$$(h, n) * (e_H, e_N) = (h, n \cdot \varphi_h(e_N)) = (h, n \cdot e_N) = (h, n)$$

となる. これで単位元であることが示せた.

逆元は  $(h, n)^{-1} = (h^{-1}, \varphi_h^{-1}(n^{-1}))$  となる. ここで  $\varphi_h^{-1} \in \text{Aut}(H)$  は  $\varphi_h \in \text{Aut}(H)$  の逆写像. 実際,

$$(h, n) * (h^{-1}, \varphi_h^{-1}(n^{-1})) = (e_H, n \cdot \varphi_h(\varphi_h^{-1}(n^{-1}))) = (e_H, n \cdot n^{-1}) = (e_H, e_N)$$

および

$$\begin{aligned} (h^{-1}, \varphi_h^{-1}(n^{-1})) * (h, n) &= (e_H, \varphi_h^{-1}(n^{-1}) \cdot \varphi_{h^{-1}}(n)) \stackrel{*3}{=} (e_H, \varphi_h^{-1}(n^{-1}) \cdot \varphi_h^{-1}(n)) \\ &= (e_H, \varphi_h^{-1}(n^{-1}n)) = (e_H, e_N) \end{aligned}$$

が成り立つ. 但し \*3 で  $\varphi_h^{-1} = \varphi_{h^{-1}}$  を用いた.

**問題 13.4.** 任意の  $h \in H$  に対し  $\varphi_h = \text{id}_N$  なので,  $(h_1, n_1) * (h_2, n_2) = (h_1 h_2, n_1 \varphi_{h_1}(n_2)) = (h_1 h_2, n_1 n_2)$  となり, 直積群における積になっている. よって  $H \rtimes_{\text{id}} N \simeq H \times N$ .

**問題 13.5.** (1)  $(h, e_N) \cdot (h', e_N) = (hh', e_N)$ ,  $(h, e_N)^{-1} = (h^{-1}, e_N)$  より写像  $H \rightarrow H'$ ,  $h \mapsto (h, e_N)$  は群の同型写像. よって  $H' \sim H$ .

(2)  $(e_H, n) \cdot (e_H, n') = (e_H, nn')$ ,  $(e_H, n)^{-1} = (e_H, n^{-1})$  より写像  $H \rightarrow H'$ ,  $h \mapsto (h, e_N)$  は群の同型写像. よって  $H' \sim H$ . また  $(h, n)^{-1}(e_H, n')(h, n) = (h, n)^{-1}(h, n'n) = (h^{-1}, \varphi_h^{-1}(n^{-1}))(h, n'n) = (e_H, \varphi_h^{-1}(n^{-1})\varphi_{h^{-1}}(n'n))$  より  $H' \triangleleft G$  となる.

(3) 任意の  $(h, n) \in G$  は  $(h, n) = (e_H, n)(h, e_H) \in N'H'$  と書けるので  $G = N'H'$ . また  $N' \cap H' = \{(e_N, e_H)\} = \{e_G\}$ .

**問題 13.6.** \*2 求める群は位数 6 の二面体群  $D_6$ . これは位数 2 の巡回群  $C_2$  と位数 3 の巡回群  $C_3$  の半直積として  $D_6 \simeq C_2 \rtimes_{\varphi} C_3$  とも書ける. 群準同型  $\varphi: C_2 \rightarrow \text{Aut}(C_3)$  は,  $C_2 = \{e, s\}$ ,  $C_3 = \{e, r, r^2\}$  と書くと,  $\varphi_e = \text{id}_{C_3}$ ,  $\varphi_s(r) = r^2$ ,  $\varphi_s(r^2) = r$  で定まるもの.

$G$  が条件を満たすことは明らか. 最小位数であることは次のようにわかる: 位数が 2, 3, 5 の群は素数位数なので巡回群である. 位数が 4 の群のうち巡回群  $C_4$  でないものは  $C_2 \rtimes_{\varphi} C_2$  と書けるが,  $\varphi(e) = \varphi(s) = \text{id}_{C_2}$  となるしかないので, 直積  $C_2 \times C_2$  になる. よって求める群の位数は少なくとも 6 である.

位数 6 の群のうち条件を満たすものが  $D_6$  しかないことは次のようにわかる: Sylow の定理より位数 2 の元  $s$  と位数 3 の元  $r$  があるが,  $srs^{-1}$  も位数 3 だから  $srs^{-1} = r$  または  $r^2$ . 前者は  $C_2 \times C_3 \simeq C_6$  であり, 条件を満たさない. 後者が二面体群にあたる.

\*2 ver. 0.2 で修正しました.

## 13.2 Lebesgue 積分論

問題 13.7.  $x \in (0, \infty)$  で  $|t^{-1} \sin(tx)| \leq x$  であり  $x(e^x - 1)^{-1}$  は可積分だから, Lebesgue 収束定理が適用できて

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1} \sin(tx) dx = \int_0^\infty \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} \frac{1}{t} \sin(tx) \right) dx = \int_0^\infty x(e^x - 1)^{-1} dx.$$

あとは  $e^{-x} = u$  と変数変換して

$$\int_0^\infty x(e^x - 1)^{-1} dx = \int_0^\infty (-\log u)(u - 1)^{-1} du = \frac{\pi^2}{6}.$$

問題 13.8.  $\log(1+x) = \sum_{n=1}^\infty (-x)^n/n$  と  $x=0$  まわりで Taylor 展開すると,

$$\sum_{n=1}^\infty \int_0^1 -\frac{1}{n} x^n \log x dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)} \int_0^1 x^n dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)^2} < \infty.$$

よって和と積分の順序が交換できて,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log x \log(1+x) dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^1 \frac{1}{n} (-x)^n \log x dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n(n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} = 2 - 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} + 2 \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(2n)^2} \\ &= 2 - 2 \log 2 - \frac{1}{12} \pi^2. \end{aligned}$$

問題 13.9. 先に  $y$  積分をして得られる

$$\int_0^\infty \left( \int_0^\infty y e^{-xy} dy \right) |\sin^3 x| dx$$

を考えると,

$$\int_0^\infty y e^{-xy} dy = x^{-2}, \quad \int_0^1 x^{-2} |\sin^3 x| dx \leq \int_0^1 x dx < \infty, \quad \int_1^\infty x^{-2} |\sin^3 x| dx \leq \int_1^\infty x^{-2} dx < \infty$$

となるので, Fubini の定理が適用できる. 求める積分を  $I$  とおくと,

$$I = \int_0^\infty \int_0^\infty y e^{-xy} \sin^3 x dx dy = \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-xy} \sin^3 x dx \right) y dy.$$

ここで  $\sin^3 x = (3 \sin x - \sin 3x)/4$ ,  $\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx = b/(a^2 + b^2)$  を使うと

$$I = \int_0^\infty \left( \frac{3}{4} \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{4} \frac{3}{9+y^2} \right) y dy = \frac{3}{8} \int_0^\infty \left( \frac{1}{1+t} - \frac{1}{9+t} \right) dt = \frac{3}{4} \log 3.$$

### 13.3 微分方程式

**問題 13.10.**  $x$  の関数として,  $\sin(x+y)$  と  $\sin x \cos y + \cos x \sin y$  はともに常微分方程式  $u''(x) + u(x) = 0$ ,  $u(0) = \sin(y)$ ,  $u'(0) = \cos(y)$  の解なので, 両者は一致する.

同様に,  $\cos(x+y)$  と  $\cos x \cos y - \sin x \sin y$  はともに常微分方程式  $v''(x) + v(x) = 0$ ,  $v(0) = \cos(y)$ ,  $v'(0) = -\sin(y)$  の解なので, 両者は一致する.

**問題 13.11.** 微分方程式の  $y'$  の項を消去するために

$$\xi = \int e^{-\int x(-t)/(1-t^2)dt} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \iff x = \sin \xi$$

と変数変換すると, 微分方程式は

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + c^2 y = 0 \iff \frac{d^2 y}{d\xi^2} + c^2 y = 0$$

となる. よって一般解は,  $c_1$  と  $c_2$  を積分定数として

$$x(t) = c_1 \cos(c\xi) + c_2 \sin(c\xi) = c_1 \cos(c \arcsin x) + c_2 \sin(c \arcsin x).$$

**問題 13.12.**  $y = e^{\lambda x}$  を代入して  $\lambda^3 + a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(y) = 0$ . この解が  $\lambda = 1, \pm 2i$  になればよいから,  $\lambda^3 + a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(y) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4)$ . よって  $a(x) = -1$ ,  $b(x) = 4$ ,  $c(x) = -4$ .

**問題 13.13.** (1)  $|x(t)|^2 = {}^T x(t) \cdot x(t)$  を微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d|x(t)|^2}{dt} &= \frac{d{}^T x(t)}{dt} \cdot x(t) + {}^T x(t) \cdot \frac{dx(t)}{dt} = {}^T(A(t)x(t)) \cdot x(t) + {}^T x(t) \cdot A(t)x(t) \\ &= {}^T x(t) \cdot (A(t) + {}^T A(t)) \cdot x(t) = 0. \end{aligned}$$

よって  $|x(t)|$  は  $t$  に依存しない.

(2)  ${}^T R(t) \cdot R(t) = I_n$  を示せばよい.  $\frac{d}{dt} R(t) = A(t)R(t)$  より  $\frac{d}{dt} ({}^T R(t)) = {}^T R(t) \cdot {}^T A(t)$ . よって

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ({}^T R(t) \cdot R(t)) &= {}^T R(t) \cdot \left( \frac{d}{dt} R(t) \right) + \left( \frac{d}{dt} {}^T R(t) \right) \cdot R(t) \\ &= {}^T R(t) \cdot A(t)R(t) \cdot {}^T R(t) + {}^T R(t) {}^T A(t) \cdot R(t) \\ &= {}^T R(t) (A(t) - A(t)) R(t) = 0. \end{aligned}$$

よって  ${}^T R(t) \cdot R(t)$  は  $t$  に依存しない.  ${}^T R(0) \cdot R(0) = I_n$  なので示せた.

### 連絡事項

来週 (7/26) は最終回です. 小テストはありません. またレポートの提出期限は来週の演習の時間とします.

以上です.