数学演習 VII・VIII　7 月 19 日分問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

13　復習 3

今回と次回は, 今までに扱ってきた内容の総合演習をします.
各問題の冒頭にある $*$ の数は, その問題の難易度の目安を表しています.

13.1　群論

問題 13.1 ($*$)**.** n 次の対称群が次の 2 元で生成されることを示せ.

$$(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}, \quad (1,2,\ldots,n) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

問題 13.2 ($*$)**.** 位数が n の巡回群を C_n と書く. 直積群 $C_m \times C_n$ がまた巡回群であるための, 自然数 m, n の必要十分条件を求めよ.

問題 13.3 ($*$ **半直積**)**.** H と N を群とし, $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ を群準同型とする. $h \in H$ に対し $\varphi_h := \varphi(h) \in \mathrm{Aut}(N)$ と書く. この時, 集合としての直積 $H \times N$ は,

$$(h_1, n_1) * (h_2, n_2) := (h_1 h_2, n_1 \varphi_{h_1}(n_2)) \quad (h_1, h_2 \in H\ n_1, n_2 \in N)$$

で定まる写像 $* : (H \times N) \times (H \times N) \to H \times N$ によって群になることを示せ.

定義. 問題 13.3 で得られた群 $(H \times N, *)$ を H と N の (準同型 φ による) **半直積** (semi-direct product) と呼び, $H \ltimes_\varphi N$ あるいは単に $H \ltimes N$ と書く.

問題 13.4 ($*$)**.** H, N を群とする. $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ を自明な群準同型, 即ち任意の $h \in H$ に対し $\varphi(h) = \mathrm{id}_N$ とする. この時, 半直積 $H \ltimes_\varphi N$ は直積群 $H \times N$ と同型であることを示せ.

問題 13.5 ($*$)**.** H と N を群とし, $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ を群準同型とする. 半直積 $G := H \ltimes_\varphi N$ が以下の性質を満たすことを示せ.

(1) $H' := \{(h, e_N) \mid h \in H\}$ は H と同型な G の部分群.
(2) $N' := \{(e_H, n) \mid n \in N\}$ は N と同型な G の正規部分群.
(3) $G = N'H'$ かつ $N' \cap H' = \{e_G\}$.

注意. 問題 13.5 が主張するように, 半直積 $H \ltimes_\varphi N$ は H, N と同型な部分群を含む. 上の問題では区別のため H', N' と記号を変えたが, 通常は同じ記号 H, N を用いて, 「$H \subset H \ltimes_\varphi N$ は部分群, $N \triangleleft H \ltimes_\varphi N$」などと書く. 次の問題 13.6 ではこのように濫用した記号を用いる.

[*1] 2018/07/19 版, ver. 0.2.

問題 13.6 (∗∗)**.** 以下の二つの性質をともに満たす群 G のうち, 最小位数のものを求めよ.

(1) $G = H \ltimes_\varphi N$ と半直積で書けて, 更に H, N は G の自明な部分群ではない.

(2) G は直積ではない.

13.2 Lebesgue 積分論

この副節では積分は Lebesgue 積分のことを意味します.

問題 13.7 (∗)**.** 次の極限を求めよ.

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^\infty (e^x - 1)^{-1} \sin(tx)\, dx.$$

問題 13.8 (∗)**.** 次の積分を求めよ.

$$\int_0^1 \log x \, \log(1+x)\, dx.$$

問題 13.9 (∗∗)**.** 次の積分を求めよ.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty y e^{-xy} \sin^3 x \, dx dy.$$

13.3 微分方程式

問題 13.10 (∗)**.** 常微分方程式の解の一意性から, 三角関数の加法定理 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ を導け.

問題 13.11 (∗∗)**.** 次の未知関数 $y(x)$ に関する微分方程式の一般解を求めよ. 但し c は実数定数.

$$(1-x^2)y'' - xy' + c^2 y = 0$$

問題 13.12 (∗)**.** 微分方程式 $y''' + a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ の線形独立な解が e^x, $\cos 2x$, $\sin 2x$ であるとき, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ を決定せよ.

問題 13.13 (∗)**.** 実数成分の反対称な正方行列関数 $A(t)$, つまり ${}^T\!A(t) = -A(t)$ を満たす $A(t)$ で定まる次の連立微分方程式を考える.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x.$$

(1) 解 $x(t)$ は $|x(t)| = |x(0)|$ を満たすことを示せ.

(2) 基本解行列 $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ は直交行列であることを示せ.

連絡事項

来週 (7/26) は最終回です. 小テストはありません.
レポートの締め切りも来週までとします.

以上です.