

数学演習 VII・VIII 7月12日分小テスト解答*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida>

問題. 次の Lebesgue 積分を計算せよ.

$$\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} dx dy.$$

解答. 被積分関数は連続関数だから可測関数. また正なので Fubini の定理が使える. 積分領域が

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

となることに注意して

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} dx dy &= \int_0^1 \int_0^x x^2 e^{xy} dy dx = \int_0^1 [x e^{xy}]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 (x e^{x^2} - x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1. \end{aligned}$$

コメント. Fubini の定理が適用できることの議論を 2 点, 求積を 3 点で採点しました. 平均点は 1.9 点でした. この問題も完答できるようにして下さい.

連絡事項

先週 (7/12) までの総得点を, 今回返却した小テストの裏面に書きました. 赤丸で囲んである数字が総得点です. 以下のような人数分布で成績を付ける予定です.

総得点	~ 40	41 ~ 70	71 ~ 110	111 ~
成績	C	B	A	S
人数	5	9	4	3

以上です.

*1 2018/07/12 版, ver. 0.1.