# 数学演習 VII・VIII　7 月 12 日分解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

## 12　常微分方程式 2/曲線と曲面の幾何 3

### 12.1　常微分方程式 2: 級数解

**問題 12.1.** $y=\sum_{j=0}^{\infty}c_jx^j$ とおいて $y''-xy'-ay=0$ に代入し, $x^j$ についてまとめると

$$\textstyle\sum_{j\geq 0}\big((j+2)(j+1)c_{j+2}-(j+a)c_j\big)x^j \;=\; 0.$$

よって $c_j$ に関する漸化式

$$c_{j+2} \;=\; \frac{j+a}{(j+2)(j+1)}c_j$$

を得る. 初期値 $(c_0,c_1)=(1,0)$ と $(0,1)$ に対応して基本解を 2 つ得る. 漸化式を解くと, $(c_0,c_1)=(1,0)$ なら

$$c_j \;=\; \begin{cases} \frac{a+2k}{(2k)\cdot(2k-1)}\cdots\frac{a+2}{4\cdot 2}\frac{a}{2\cdot 1} \;=\; (a/2)_k 2^k/(1)_{2k} & (j=2k\ \text{偶数}) \\ 0 & (j:\ \text{奇数}) \end{cases}$$

但し, $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $(z)_k := z(z+1)\cdots(z+k-1)$ と定めた. 同様に $(c_0,c_1)=(0,1)$ なら

$$c_j \;=\; \begin{cases} \frac{a+2k-1}{(2k+1)\cdot(2k)}\cdots\frac{a+3}{5\cdot 4}\frac{a+1}{3\cdot 2} \;=\; \big((a+1)/2\big)_k 2^k/(1)_{2k+1} & (j=2k+1\ \text{奇数}) \\ 0 & (j:\ \text{偶数}) \end{cases}$$

よって, $C_1$ と $C_2$ を積分定数として, 一般解は

$$y(x) \;=\; C_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a/2)_k}{(1)_{2k}}2^kx^{2k}+C_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\big((a+1)/2\big)_k}{(1)_{2k+1}}2^kx^{2k+1}.$$

収束半径 $R$ は $\lim_{j\to\infty}|c_{j+1}/c_j|=0$ から $R=\infty$ と分かる.

**問題 12.2.** $x=1$ が通常点, $x=0$ が特異点であることに注意する. $y=\sum_{j=0}^{\infty}c_j(x-1)^j$ を $xy'-y+2x=0 \iff (x-1)y'+y'-y+2(x-1)+2=0$ に代入して $x-1$ の冪で整理すると

$$2+2(x-1)+\sum_{j\geq 0}\big((j+1)c_{j+1}+(j-1)c_j\big)(x-1)^j \;=\; 0.$$

よって $2+c_1-c_0=0$, $2c_2+2=0$, $(j+1)c_{j+1}+(j-1)c_j=0$ $(j\geq 2)$. この漸化式を解いて, $k\geq 2$ では $c_k=2(-1)^{k+1}/(k(k-1))$. 以上より, $C$ を積分定数として, 一般解は

$$y(x) \;=\; C+(C-2)(x-1)-2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(1-x)^k}{k(k-1)}.$$

収束半径 $R$ は $\lim_{j\to\infty}|c_{j+1}/c_j|=1$ より $R=1$.

**問題 12.3.** (1) $x=0$ が特異点であることに注意して, $y=x^{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}c_jx^j$ を $xy''+cy'-y=0$ に代入して, $x$ の冪で整理すると

$$\sum_{j\geq 0}\big((\lambda+j+1)(\lambda+j+c)c_{j+1}-c_j\big)x^{\lambda+j} \;=\; 0.$$

よって $\lambda=0$ なら $c_j=c_0/(c)_j(1)_j$, $\lambda=1-c$ なら $c_j=c_0/(2-c)_j(1)_j$. これらから結論を得る.

(2) 略.

[*1] 2018/06/05 版, ver. 0.1.

## 12.2　常微分方程式 2: 定性理論

**問題 12.4.** (1) 固有方程式が $\lambda^2+2\lambda+2=0$ なので固有値は $-1\pm i$. よって安定渦状点.

(2) 固有方程式が $\lambda^2-4\lambda+4=0$ なので固有値は 2 (重根). よって不安定結節点

(3) 固有方程式が $\lambda^2-2\lambda-3=0$ なので固有値は $3,-1$. よって鞍点

**問題 12.5.** 不動点は $x'=y'=0$ となる点である. 与えられた微分方程式からこの連立方程式を解けば不動点が求まる. あとは各不動点において微分方程式を線形近似して, 得られた線型微分方程式について問題 12.4 のようにの原点での安定性の判定を行えば解のふるまいが分かる.

(1) 不動点は $(\pm1,\pm1),(0,0)$ の 5 点. $\pm(1,1)$ は源点, $\pm(1,-1)$ は沈点, $(0,0)$ はどちらでもない.

(2) 不動点は $(0,0),(2,0),(0,2),(1,0),(0,1),(2,2)$ の 6 点. 前半 3 つは源点と沈点のどちらでもない. 後半 3 つは順に源点, 源点, 判定不能.

## 12.3　曲線と曲面の幾何 3: 測地線と Gauss の脅威の定理

**問題 12.6.** 半径 $r$ の球面を

$$p(u,v) \;=\; r\cdot(\cos u\cos v,\cos u\sin v,\sin u),\quad (u,v)\in[-\pi/2,\pi/2]\times[0,2\pi]$$

とパラメータ表示する. $p_u=r\cdot(-\sin u\cos v,-\sin u\sin v,\cos u)$, $p_v=r\cdot(-\cos u\sin v,\cos u\cos v,0)$ より第一基本行列は

$$I \;=\; \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}p_u\cdot p_u & p_u\cdot p_v\\ p_v\cdot p_u & p_v\cdot p_v\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}r^2 & 0\\ 0 & r^2\cos^2 u\end{pmatrix}.$$

よって Christoffel 記号は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22}\\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22}\end{pmatrix} &:= \frac{1}{2(EG-F^2)}\begin{pmatrix}G & -F\\ -F & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_u & E_v & 2F_u-G_u\\ 2F_u-E_v & G_u & G_v\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2r^4\cos^2 u}r^2\begin{pmatrix}\cos^2 u & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}r^2\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\sin u\cos u\\ 0 & -2\sin u\cos u & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0 & \sin u\cos u\\ 0 & -\sin u/\cos u & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

従って測地線の方程式は

$$u''+v'\sin u\cos u \;=\; 0,\quad v''-2u'v'\sin u/\cos u \;=\; 0$$

となる. 2 番目の方程式を $v''/v'=2u'\sin u/\cos u$ と変数分離して積分すると

$$v' \;=\; c_1/\cos^2 u\quad (c_1 \text{ は積分定数}). \tag{12.1}$$

これを 1 番目の方程式に代入すると $u''+c_1^2\sin u/\cos^3 u \;=\; 0$ となり, $u'$ をかけて整理すると $((u')^2)'+(c_1^2/\cos^2 u)'=0$. 両辺を積分して

$$(u')^2+c_1^2/\cos^2 u \;=\; c_2\quad (c_2 \text{ は積分定数}).$$

この式と (12.1) から, 測地線の方程式は次の方程式と同値である.

$$(u'/v')^2 \;=\; (c_2/c_1^2)\cos^4 u-\cos^2 u. \tag{12.2}$$

一方で大円は球面と原点を通る平面 $ax+by+cz=0$ の交叉だから, $(x,y,z)=p(u,v)$ を代入することで

$$a\cos u\cos v+b\cos u\sin v+c\sin u \;=\; 0 \iff \cos u\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(v+\theta) \;=\; -c\sin u$$

$$\iff \tan u = \ell \sin(v+\theta) \tag{12.3}$$

とパラメータ表示できる．但し $\ell, \theta$ は $a, b, c$ から定まる定数．この表示 (12.3) の両辺を微分することで $u'/\tan u = \ell v' \cos(v+\theta)$ となり，$v+\theta$ を消去して

$$(u'/v'\cos u)^2 + \tan^2 u = \ell^2 \iff (u'/v')^2 = (\ell^2+1)\cos^4 u - \cos^2 u$$

を得る．これは (12.2) と一致する．常微分方程式の解の存在と一意性から，測地線は大円であることが従う．

## 12.4　曲線と曲面の幾何 3: Gauss-Bonnet の定理

**問題 12.7.**　(1) $S$ のパラメータ表示を $p = r(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ $(0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$ と置くと，4 つの領域はそれぞれ

$$0 \le \varphi \le \alpha, \quad \alpha \le \varphi \le \pi, \quad \pi \le \varphi \le \pi+\alpha, \quad \pi+\alpha \le \varphi \le 2\pi$$

に対応する．最初の領域の面積は

$$\int_0^\alpha \int_0^\pi |p_u \times p_v|\, d\theta d\varphi = \int_0^\alpha \int_0^\pi r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi = 2r^2 \int_0 \alpha d\varphi = 2r^2\alpha.$$

他も同様にして，$2r^2(\pi-\alpha)$, $2r^2\alpha$, $2r^2(\pi-\alpha)$ となる．

(2) $\triangle ABC$ を含む三日月領域を $S^1_X$ $(X = A, B, C)$ とする．同様に $\triangle A'B'C'$ を含む三日月領域を $S^1_Y$ $(Y = A', B', C')$ とする．このとき

$$S^1_A \cap S^1_B = S^1_B \cap S^1_C = S^1_C \cap S^1_A = \triangle ABC,$$
$$S^1_{A'} \cap S^1_{B'} = S^1_{B'} \cap S^1_{C'} = S^1_{C'} \cap S^1_{A'} = \triangle A'B'C'$$

となる．これから $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ が三回ずつ覆われることが分かる．

(3) (2) の記号を使うと，(1) から $S^1_A = S^1_{A'} = 2\alpha$, $S^1_B = S^1_{B'} = 2\beta$, $S^1_C = S^1_{C'} = 2\gamma$. すると (2) の結果から，六つの領域の面積の総和は

$$4r^2(\alpha+\beta+\gamma) = A(S) + 2A(\triangle ABC) + 2A(\triangle A'B'C') \iff 4r^2(\alpha+\beta+\gamma) = 4\pi r^2 + 4A(\triangle ABC)$$

となる．最後に $S$ の Gauss 曲率が $r^{-2}$ であることに注意して，Gauss-Bonnet の定理を得る．

**問題 12.8.** $AB = r\omega$ として，測地線三角形 $\triangle ABC$ の面積は

$$A(\triangle ABC) = \int_0^\omega \int_0^\omega r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi = r^2\theta(1-\cos\theta).$$

よって求める条件は $\pi/100 \le \theta(1-\cos\theta) \iff \theta \ge 0.3994$. 地球の半径 $r = 6371\mathrm{km}$ として $AB \ge r \cdot 0.3994 = 2544.58 \to 2545\,\mathrm{km}$. 角度にすると $\omega \ge 0.3994 = 22.88°$ となる．[*2]

なお条件を (内角の和) $\ge 1.001\pi$ にすると $\pi/1000 \le \theta \iff (1-\cos\theta) \iff \theta \ge 0.1848$. よって $AB \ge r \cdot 0.1848 = 1177.4 \to 1177\,\mathrm{km}$. 角度にすると $\omega \ge 0.1848 = 10.59°$ となる．

また条件を (内角の和) $\ge 1.0001\pi$ にすると $\pi/10000 \le \theta \iff (1-\cos\theta) \iff \theta \ge 0.08571$. よって $AB \ge r \cdot 0.08571 = 546.06 \to 546.1\,\mathrm{km}$. 角度にすると $\omega \ge 0.08571 = 4.91°$ となる．

**問題 12.9.** 球面を

$$p(u,v) := (r\cos u\cos v, r\cos u\sin v, r\sin u), \quad (u,v) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi]$$

[*2] これだけの長さの測地線を地上にひくのは，Gauss の時代には難しそうです．

とパラメータ表示すると

$$
\begin{aligned}
p_u &= r\cdot(-\sin u\cos v, -\sin u\sin v, \cos u), & p_v &= r\cdot(-\cos u\sin v, \cos u\cos v, 0),\\
p_u\times p_v &= -r^2\cos u\cdot(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u) & |p_u\times p_v| &= r^2\cos u,\\
n &= -(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin v), & &\\
p_{uu} &= -r\cdot(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin v), & p_{uv} &= r\sin u\cdot(\sin v, -\cos v, 0),\\
p_{vv} &= -r\cos u\cdot(\cos v, \sin v, 0). & &
\end{aligned}
$$

よって面積要素は

$$dA = |p_u\times p_v|\,dudv = r^2\cos u\,dudv.$$

第一, 第二基本行列は

$$I = \begin{pmatrix} p_u\cdot p_u & p_u\cdot p_v\\ p_v\cdot p_u & p_v\cdot p_v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0\\ 0 & r^2\cos^2 u\end{pmatrix},\ I\!I = \begin{pmatrix} p_{uu}\cdot n & p_{uv}\cdot n\\ p_{vu}\cdot n & p_{vv}\cdot n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0\\ 0 & r\cos^2 u\end{pmatrix}$$

となる．よって

$$I^{-1}I\!I = \begin{pmatrix} 1/r & 0\\ 0 & 1/r\end{pmatrix},\quad \text{Gauss 曲率 } K = \det(I^{-1}I\!I) = 1/r^2.$$

すると

$$\iint_S K\,dA = \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos u\,dudv = 4\pi = 2\pi\times 2.$$

球面の Euler 数は 2. よって Gauss-Bonnet の定理が確かめられた.

**問題 12.10.** 直接計算で以下が得られる.

$$
\begin{aligned}
p_u &= r\cdot(-\sin u\cos v, -\sin u\sin v, \cos u), & p_v &= (a+r\cos u)\cdot(-\sin v, \cos v, 0),\\
p_u\times p_v &= -r(a+r\cos u)\cdot(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin v), & |p_u\times p_v| &= r(a+r\cos u),\\
n &= -(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin v), & &\\
p_{uu} &= -r\cdot(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin v), & p_{uv} &= r\sin u\cdot(\sin v, -\cos v, 0),\\
p_{vv} &= -(a+r\cos u)\cdot(\cos v, \sin v, 0). & &
\end{aligned}
$$

よって面積要素は

$$dA = |p_u\times p_v|\,dudv = r(a+r\cos u)\,dudv.$$

第一基本行列は

$$I = \begin{pmatrix} p_u\cdot p_u & p_u\cdot p_v\\ p_v\cdot p_u & p_v\cdot p_v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0\\ 0 & (a+r\cos u)^2\end{pmatrix}$$

となり, 第二基本行列は

$$I\!I = \begin{pmatrix} p_{uu}\cdot n & p_{uv}\cdot n\\ p_{vu}\cdot n & p_{vv}\cdot n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0\\ 0 & (a+r\cos u)\cos u\end{pmatrix}$$

となる．よって

$$I^{-1}I\!I = \begin{pmatrix} 1/r & 0\\ 0 & \cos u/(a+r\cos u)\end{pmatrix},\quad \text{Gauss 曲率 } K = \det(I^{-1}I\!I) = \frac{\cos u}{r(a+r\cos u)}.$$

すると

$$\iint_S K\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos u\,dudv = 0 = 2\pi\times 0.$$

$S$ はトーラスなので Euler 数は 0. よって Gauss-Bonnet の定理が確かめられた.

以上です．