数学演習 VII・VIII 7 月 12 日分問題[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

12 常微分方程式 2/曲線と曲面の幾何 3

各問題の冒頭にある $*$ の数は, その問題の難易度の目安を表しています.

12.1 常微分方程式 2: 級数解

問題 12.1 ($*$ **Hermete-Weber の微分方程式**, [坂井, p.66 計算 1.1]). $a \in \mathbb{R}$ とする. 未知関数 $y = y(x)$ に関する 2 階微分方程式

$$y'' - xy' - ay \,=\, 0$$

の一般解を $x = 0$ を中心とした冪級数の形で求め, 得られた級数の収束半径を求めよ.

問題 12.2 ($*$ [坂井, p.67 計算 1.2]). 未知関数 $y = y(x)$ に関する 1 階常微分方程式 $xy' - y + 2x = 0$ の一般解を $x = 1$ を中心とした冪級数の形で求め, 得られた級数の収束半径を求めよ.

問題 12.3 ($*$ **合流超幾何微分方程式** ${}_0F_1$, [坂井, p.186]). $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ とする.

(1) 2 階常微分方程式

$$xy'' + cy' - y \,=\, 0 \tag{12.1}$$

の一般解を $x = 0$ を中心とした級数解で求めると, C と C' を積分定数として

$$y(x) \,=\, C \cdot {}_0F_1(-, c\,; x) + C' \cdot x^{1-c}{}_0F_1(-, 2-c\,; x)$$

となることを確認せよ. 但し

$${}_0F_1(-, c\,; x) \,:=\, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(c)_k k!} x^k, \quad (c)_k \,:=\, c(c+1)\cdots(c+k-1).$$

(2) 微分方程式 (12.1) は $x = -\xi^2/4$, $y = \xi^{1-c}\eta$ と変数変換することで, 次の **Bessel の微分方程式**に帰着できることを確認せよ.

$$\xi^2 \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \xi \frac{d\eta}{d\xi} + (\xi^2 - (1-c)^2)\eta \,=\, 0.$$

注意. Gauss の超幾何微分方程式 (5/24 分のレポート問題 6.1) の特異点を合流させていくことで, 次のような微分方程式の退化図式が得られる.

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{Bessel } {}_0F_1 \arrow[dr] & \\
\text{Gauss } {}_2F_1 \arrow[r] & \text{Kummer } {}_1F_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Airy} \\
 & & \text{Hermete-Weber} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

[*1] 2018/07/19 版, ver. 0.2.

12.2　常微分方程式 2: 定性理論

問題 12.4 (∗ [坂井, p.322 計算 3.1]). 以下の線型方程式系において, 原点が安定点, 渦状点, 鞍点のどれにあたるか判定せよ.

$$(1)\ \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 33 & 13 \\ -89 & -35 \end{pmatrix} x. \qquad (2)\ \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -26 & 49 \\ -16 & 30 \end{pmatrix} x. \qquad (3)\ \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 69 & -154 \\ 30 & -67 \end{pmatrix} x.$$

問題 12.5 (∗ [坂井, p.322 計算 3.2]). 以下の $\mathbb{R}^2$ 上の微分方程式の不動点を全て求めよ. また各不動点において微分方程式を線形近似し, 不動点での近傍での解のふるまいを調べよ.

$$(1)\ \frac{dx}{dt} = (x^2-1)y, \quad \frac{dy}{dt} = (y^2-1)x. \qquad (2)\ \frac{dx}{dt} = y(2-y)(x-2y+2), \quad \frac{dy}{dt} = x(2-x)(y-2x+2).$$

12.3　曲線と曲面の幾何 3: 測地線と Gauss の脅威の定理

$\mathbb{R}^n$ と書いたら Euclid 空間のことだとします.

定義. 写像 $p(u,v)$ でパラメータ表示された曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ を考える.

(1) uv 平面上の曲線 $t \mapsto (u(t), v(t))$ でもって $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ とパラメータ表示される曲線 $C \subset S$ を, **S 上の曲線**と呼ぶ.

(2) 曲面 S 上の点 $p_0 = p(u_0, v_0) \in S$ における S の**接平面** $T_{p_0}S$ を

$$T_{p_0}S := \mathbb{R}\, p_u(u_0, v_0) + \mathbb{R}\, p_v(u_0, v_0)$$

と定める[*2]. また法線ベクトル方向の直線を

$$N_{p_0}S := \mathbb{R}\, p_u(u_0, v_0) \times p_v(u_0, v_0)$$

と書く. $T_{p_0}S$ と $N_{p_0}S$ は直交することに注意する.

(3) $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ とパラメータ表示される S 上の曲線 C は, 次の条件を満たすとき**測地線**と呼ばれる: 加速度ベクトル $\gamma''(t) \in \mathbb{R}^3$ を

$$\gamma''(t) = [\gamma''(t)]^T + [\gamma''(t)]^N, \quad [\gamma''(t)]^T \in T_{\gamma(t)}S, \quad [\gamma''(t)]^N \in N_{\gamma(t)}S$$

のように接平面成分と法線方向に分解したときに, 任意の t で

$$[\gamma''(t)]^T = 0.$$

定理 (測地線と最短線 [梅山, 定理 10.5]). (パラメータ表示された) 曲面上の 2 点を結ぶ曲線のうち長さが最小なものが存在すれば, その弧長パラメータによる表示は測地線である.

測地線は常微分方程式で決定されることを思い出すために, まず Christoffel 記号を導入する. $S \subset \mathbb{R}^3$ を写像 $p(u,v)$ でパラメータ表示される曲面とする. その第一基本量 E, F, G は

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p_u \cdot p_u & p_u \cdot p_v \\ p_v \cdot p_u & p_v \cdot p_v \end{pmatrix}$$

[*2] 場合によっては p_0 を通る平面として $T_{p_0}S = \mathbb{R}p_u(u_0,v_0) + \mathbb{R}p_v(u_0,v_0)$ と定めることもあります. $N_{p_0}S$ も $p_0 + \mathbb{R}p_u(u_0,v_0) \times p_v(u_0,v_0)$ と定めることがあります.

で定義される．これらを用いて, **Christoffel 記号** Γ^i_{jk} $(i,j,k=1,2)$ を以下で定義する．

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} := \frac{1}{2(EG-F^2)} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_u - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.$$

定理 (**測地線の方程式**, [梅山, p.108])**.** $S \subset \mathbb{R}^3$ を写像 $p(u,v)$ でパラメータ表示される曲面とする．$\gamma(t) = p(u(t), v(t))$ が S 上の測地線ならば

$$\begin{cases} u'' + u'^2\Gamma^1_{11} + 2u'v'\Gamma^1_{12} + v'^2\Gamma^1_{22} = 0 \\ v'' + u'^2\Gamma^2_{11} + 2u'v'\Gamma^2_{12} + v'^2\Gamma^2_{22} = 0 \end{cases}. \tag{12.2}$$

問題 12.6 $(**)$**.** 測地線の方程式 (12.2) を用いて, 球面上の測地線が大円であることを示せ．

定理 (**Gauss の驚異の定理**, [梅山, p.111])**.** Gauss 曲率は第一基本量とその偏導関数のみで表せる．具体的には

$$\begin{aligned} K =& \frac{E(E_vG_v - 2F_uG_v + G_u^2)}{4(EG-F^2)^2} + \frac{F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v - 2F_uG_u + 4F_uF_v)}{4(EG-F^2)^2} \\ &+ \frac{G(E_uG_u - 2E_uF_v + E_v^2)}{4(EG-F^2)^2} - \frac{E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}}{2(EG-F^2)}. \end{aligned}$$

12.4　曲線と曲面の幾何 3: Gauss-Bonnet の定理

定理 12.1 (**Gauss-Bonnet の定理**)**.** 曲面上の測地三角形 $\triangle ABC$ の内角を $\angle A, \angle B, \angle C$ とすると

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \iint_{\triangle ABC} K\, dA.$$

但し K は曲面の Gauss 曲率, dA は面積要素.

問題 12.7 $(*$ [梅山, §10, 問題 6]$)$**.** 球面上の測地三角形に対しては, Gauss-Bonnet の定理 12.1 を比較的簡単に証明することができる．以下, S を半径 r の球面とし, S 上に測地三角形 $\triangle ABC$ が与えられているものとする．

(1) 測地三角形 $\triangle ABC$ の頂点 A での内角を α とおく．辺 AB と辺 AC を延長してできる 2 つの大円は, A の対蹠点 A', 即ち S の中心 O に関して A と点対称な点, で交わる．この 2 つの大円で S は 4 つの三日月形の領域に分けられる．それらの面積は, 2 つが $2r^2\alpha$, 残り 2 つが $2r^2(\pi-\alpha)$ であることを示せ．

(2) S 上の測地三角形 $\triangle ABC$ の内角を, 頂点 A, B, C に対応する順に α, β, γ とおく．また各頂点の対蹠点を A', B', C' とする．三角形 $\triangle A'B'C'$ が測地三角形であることに注意する．
(1) で考えた 4 つの領域のうち, 面積が $2r^2\alpha$ のものを S^1_A, S^2_A とおく．同様に, 頂点 B を通る 2 つの大円で囲まれる 4 つの三日月形領域のうち, 面積が $2r^2\beta$ となるものを S^1_B, S^2_B とする．また頂点 C について, 面積が $2r^2\gamma$ となる三日月形領域を S^1_C, S^2_C とする．
このとき, 6 つの領域 S^i_X $(X = A, B, C,\ i = 1, 2)$ で S 全体が覆われるが, 測地三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ だけが 3 回覆われ, 他の部分は 1 回づつ覆われることを説明せよ．

(3) S^i_X 達の面積の和を考えることで, 球面の場合の Gauss-Bonnet の定理 12.1, つまり次式を証明せよ．

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{1}{r^2}(\triangle ABC \text{ の面積}).$$

問題 12.8 (∗)**.** 問題 12.7 の応用として, 地球 (の表) 面が平面でないことを, 測地線を利用して実験で証明する[*3] ことを考える. 地球を半径 r の球面とみなす. 測地三角形 $\triangle ABC$ であって $AB = BC = CA$ のものを考える. その内角の和が 1.01π 以上になるための条件を求めよ. また $r = 6371\mathrm{km}$ として, 距離 AB の条件を求めよ.

定理 12.2 (**閉曲面の Gauss-Bonnet の定理**, [梅山, 定理 10.6])**.** 閉曲面 S の Euler 数 $\chi(S)$ と Gauss 曲率 K について,

$$2\pi\chi(S) = \iint_S K\, dA.$$

問題 12.9 (∗)**.** 半径 r の球面について, 閉曲面の Gauss-Bonnet の定理 12.2 を確かめよ.

問題 12.10 (∗)**.** $a > r > 0$ とする. 写像

$$p(u,v) = \big((a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\sin v, r\sin u\big), \quad u, v \in [0, 2\pi]$$

でパラメータ表示される曲面 S を考える. S について閉曲面の Gauss-Bonnet の定理 12.2 を確かめよ.

12.5　レポート問題

レポート問題 12.1 (∗ **Gauss 写像**)**.** 写像 $p(u,v)$ でパラメータ表示されている曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ を考える. S 上の各点 $p(u,v)$ にそこでの単位法ベクトル $n(u,v)$ を対応させる写像

$$\Phi : S \longrightarrow S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \quad p(u,v) \longmapsto \frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|}$$

を **Gauss 写像**という. 以下では

$$p(u,v) := \left(u, v, \log\Big(\frac{\cos v}{\cos u}\Big)\right), \quad (u,v) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2)$$

でパラメータ表示される曲面 S を考える.

(1) Gauss 写像 $\Phi : S \to S^2$ が単射であることを示せ.
(2) Φ の像 $\Phi(S) \subset S^2$ はどのような集合であるか述べよ.

参考文献

[坂井] 坂井秀隆, **常微分方程式**, 大学数学の入門 **10**, 東京大学出版会 (2015).
[梅山] 梅原雅顕, 山田光太郎, **曲線と曲面 — 微分幾何学的アプローチ**—, 改訂第 3 版, 裳華房 (2018).

連絡事項

レポートの**締め切りは 7/26** の演習の時間 (演習の最終回) とします.

以上です.

[*3] Gauss は実際にこのような実験を試みて, 失敗したと謂われています.