

数学演習 VII・VIII 7月5日分小テスト解答*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida>

問題. G を群, N と M を G の正規部分群とし, $N \subset M$ であると仮定する. このとき次を示せ.

- (1) $M/N \triangleleft G/N$.
- (2) 写像 $G/N \rightarrow G/M$, $xN \mapsto xM$ は全射準同型.
- (3) $G/M \simeq (G/N)/(M/N)$.

解答. (2) $N \subset M$ より写像は well-defined. 準同型であることは, $N \triangleleft G$ より $(x_1N)(x_2N) = x_1x_2NN = x_1x_2N$ となることから従う. 全射性は G/M の任意の元が xM , $x \in G$ と書けることから従う.

- (3) (2) の全射準同型を φ と書くと,

$$\text{Ker } \varphi = \{xN \in G/N \mid xM = 0 \in G/M\} = \{xN \in G/N \mid x \in M\} = M/N.$$

よって準同型定理から $G/M \simeq (G/N)/\text{Ker } \varphi = (G/N)/(M/N)$.

- (1) $M/N = \text{Ker}(\varphi : G/N \rightarrow G/M)$ と, 準同型の核はいつも正規部分群であることから $M/N \triangleleft G/N$.

コメント. 1+2+2 点で採点しました. 平均点は 3.0 点でした. この問題は完答できるようにして下さい. (3) の同型は第 3 同型定理と呼ばれることがあります.

- (1) は直接以下のように示すこともできます.

$M/N \subset G/N$ は自然に部分群になるので, 正規部分群であることのみ示す. 任意の $mN \in M/N$ 及び $gN \in G/N$ について,

$$\begin{aligned} (gN)^{-1}(mN)(gN) &= N^{-1}g^{-1}mNgN \stackrel{*1}{=} g^{-1}N^{-1}mgNN \stackrel{*3}{=} g^{-1}NmgN \\ &\stackrel{*2}{=} g^{-1}mNgN \stackrel{*1}{=} g^{-1}mgNN \stackrel{*3}{=} g^{-1}mgN. \end{aligned}$$

但し *1 では $N \triangleleft G$ を, *2 では $N \triangleleft M$ を, *3 では $N \subset G$ が部分群であることを用いた. 一方で $M \triangleleft G$ より $g^{-1}mg \in M$ なので, $(gN)^{-1}(mN)(gN) = g^{-1}mgN \in M/N$. これで示せた.

以上です.

*1 2018/07/05 版, ver. 0.1.