

数学演習 VII・VIII 7月5日分解答*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida>

11 Fubini の定理とその応用

11.1 収束定理の応用: 微分と積分の交換

問題 11.1. 求めたい積分を $I(t) = \int f(x, t) dt$ と置く. $|f_t(x, t)| = |e^{-x^2} x \sin(tx)| \leq x e^{-x^2}$ で右辺は可積分だから, 微分と積分の順序が交換できて,

$$I'(t) = - \int_0^\infty e^{-x^2} x \sin(tx) dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{-x^2})' \sin(tx) dx = -\frac{t}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(tx) dx = -\frac{t}{2} I(t).$$

よって

$$I(t) = I(0)e^{-t^2/4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2/4}.$$

問題 11.2. $t > 0$ とする. $\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}/2$ で $y = \sqrt{tx}$ と変換して

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}. \quad (11.1)$$

左辺の被積分関数を t で n 回微分したものについて

$$\left| (-x^2)^n e^{-tx^2} \right| \leq e^{-tx^2} x^{2n}, \quad \int_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n} dx < \infty.$$

よって微分と積分の順序の交換定理を逐次適用できて, (11.1) は何回でも微分できて

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} t^{-1/2-n}.$$

 $t = 1$ として, 求めたい値は $\sqrt{\pi}(2n-1)!!/2^{n+1}$.

問題 11.3. $t \in \mathbb{R}_{>0}$ として $f(x, t) := e^{-tx} \sin x$ を考える. Riemann 積分の結果 (部分積分を 2 回する) から

$$\int_0^\infty f(x, t) dx = \frac{1}{1+t^2} < \infty.$$

 $\partial_t f(t, x) = -x e^{-tx} \sin x$ について,

$$\varphi(x) := \begin{cases} x \sin x & (0 < x < 1) \\ x/(t^3 x^3/6) = 6/(t^3 x^2) & (x \geq 1) \end{cases}$$

とすれば $|\partial_t f(t, x)| \leq \varphi(x)$ かつ $\varphi(x)$ は $(0, \infty)$ で可積分. よって微分と積分の順序が交換できて

$$\int_0^\infty (-x e^{-tx} \sin x) dx = \int_0^\infty (\partial_t f(x, t)) dx = \partial_t \int_0^\infty f(x, t) dx = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

*1 2018/05/29 版, ver. 0.2.

同様に $\partial_t^2 f(t, x) = x^2 e^{-tx} \sin x$ について,

$$\psi(x) := \begin{cases} x^2 \sin x & (0 < x < 1) \\ x^2/(t^4 x^4/24) = 24/(t^4 x^3) & (x \geq 1) \end{cases}$$

とすれば $|\partial_t^2 f(t, x)| \leq \psi(x)$ かつ $\psi(x)$ は $(0, \infty)$ で可積分. よって微分と積分の順序が交換できて

$$\int_0^\infty x^2 e^{-tx} \sin x dx = \partial_t \int_0^\infty \partial_t f(x, t) dx = \frac{8t^2}{(1+t^2)^3} - \frac{2}{(1+t^2)^2}.$$

求める値は $t = 1$ として $1/2$.

問題 11.4. $e^{i\lambda x} = \sum_{n=0}^\infty (i\lambda x)^n/n!$ と Taylor 展開すると, 任意の $x \in \mathbb{R}$ で

$$\left| \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} (i\lambda x)^n e^{-tx^2} \right| \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} |\lambda x|^n e^{-tx^2} \leq e^{\lambda x - tx^2}$$

と評価できる. $e^{\lambda x - tx^2}$ は \mathbb{R} 上可積分なので, 収束定理が適用できて項別積分できることが分かる. 各項の積分は, n が奇数なら 0, 偶数なら問題 11.2 の形になる. よって

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda x - tx^2} dx &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n)!} (-\lambda^2)^n \int_{-\infty}^\infty x^{2n} e^{-tx^2} dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n)!} (-\lambda^2)^n \sqrt{\frac{\pi}{t}} \frac{(2n-1)!!}{2^n} t^{-n} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \left(\frac{-\lambda^2}{4t} \right)^n = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\lambda^2/4t}. \end{aligned}$$

11.2 重積分と Fubini の定理

問題 11.5. (1) $D_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ とする. $\chi_{D_R}(x, y) e^{-x^2 - y^2} \geq 0$ は $R \rightarrow \infty$ で単調増加に $e^{-x^2 - y^2}$ に収束する. 従って単調収束定理が使えて

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} e^{-x^2 - y^2} dx dy &= \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_{D_R}(x, y) e^{-x^2 - y^2} dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \lim_{R \rightarrow \infty} \chi_{D_R}(x, y) e^{-x^2 - y^2} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_{D_R}(x, y) e^{-x^2 - y^2} dx dy. \end{aligned}$$

一方, 極座標変換で

$$\iint_{D_R} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\theta = -\pi [e^{-r^2}]_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

これで $R \rightarrow \infty$ として,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \pi.$$

(2) $e^{-x^2 - y^2} \geq 0$ なので Fubini の定理が適用できて

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

(3) (1) と (2) より $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

問題 11.6. $(x, y) \in [0, 1] \times [a, b]$ において $x^y = e^{y \log x} \geq 0$ なので, 正值関数に関する Fubini の定理*2が使えて

$$\iint_{[0,1] \times [a,b]} x^y dx dy = \int_0^1 \int_a^b x^y dy dx = \int_a^b \int_0^1 x^y dx dy.$$

中辺について

$$\int_0^1 \int_a^b x^y dy dx = \int_0^1 \int_a^b e^{y \log x} dy dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{\log x} e^{y \log x} \right]_a^b dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx.$$

右辺について

$$\int_a^b \int_0^1 x^y dx dy = \int_a^b \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \log \frac{1+b}{1+a}.$$

但し $x^{y+1}|_{x=0} = \lim_{x \rightarrow +0} x^{y+1} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(y+1) \log x} = 0$ と計算した.

問題 11.7. (1) $\chi_E(x, t) \geq 0$ なので Fubini の定理が適用できて

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_E(x, t) dx dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x, t) dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx < \infty.$$

(2) $t^{p-1} \chi_E(x, t) \geq 0$ なので Fubini の定理が適用できて

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{p-1} \mu(E_t) dt &= \int_0^\infty t^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_E(x, t) dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty t^{p-1} \chi_E(x, t) dt \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{f(x)} t^{p-1} dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{p} t^p \right]_0^{f(x)} dx = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}} f(x)^p dx. \end{aligned}$$

問題 11.8. $|\cos(xy/n)e^{-xy^2}| \leq e^{-xy^2}$ と評価できる. まず e^{-xy^2} が可積分であることを示したい. $0 \leq e^{-xy^2}$ だから Fubini の定理が適用できて

$$\int_E e^{-xy^2} dx dy = \int_1^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xy^2} dx \right) dy = \int_1^\infty \frac{dy}{y^2} dy = 1 < \infty.$$

よって e^{-xy^2} は可積分. また $n \rightarrow \infty$ で $\cos(xy/n)e^{-xy^2} \rightarrow e^{-xy^2}$ だから, Lebesgue 収束定理が使えて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \cos(xy/n) e^{-xy^2} dx dy = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(xy/n) e^{-xy^2} dx dy = \int_E e^{-xy^2} dx dy = 1.$$

11.3 Fubini の定理の応用: 畳み込み積

問題 11.9.

$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| dy \right) dx$$

$|f(x-y)g(y)| > 0$ なので Fubini の定理より

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| dy \right) dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)| dx \right) dy = \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \right). \end{aligned}$$

最後の式は仮定より有限. よって $h(x)$ は可積分.

*2 問題のプリントには可積分関数に関する Fubini の定理を書きましたが, それとは別の形の Fubini の定理です. 仮定は非積分関数が非負であることだけです.

問題 11.10. Lebesgue 積分の平行移動不変性 $\int_{\mathbb{R}^d} f(x-x_0) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$ と鏡映不変性 $\int_{\mathbb{R}^d} f(-x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$ から $\int_{\mathbb{R}^d} f(x_0-x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$. よって

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(x-z) dz = (g * f)(x).$$

問題 11.11. Fubini の定理が適用できて

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) dx \right) dy = \left(\int_{\mathbb{R}} g(y) dy \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right). \end{aligned}$$

問題 11.12. (1) $|f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi}| = |f(x)|$ なので各 ξ について $\widehat{f}(\xi)$ を定義する積分は収束する. また

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx < \infty$$

より有界であることも分かる.

(2) $\widehat{f * g}(\xi)$ を定義する積分の被積分関数について, $|(f * g)(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi}| \leq |f(x-y)||h(x)|$ なので Fubini の定理が使えて,

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy \right) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} g(y)e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)e^{-2\pi i y \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)e^{-2\pi i y \cdot \xi} \widehat{f}(\xi) dy = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi). \end{aligned}$$

以上です.