数学演習 VII・VIII　6 月 28 日分解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

10　群論 3 (群作用, Sylow の定理)

10.1　群作用と軌道分解

問題 10.1. (1) $e.x = x$ より $e \in G_x$. 任意の $g \in G_x$ について,

$$g^{-1}.x = g^{-1}.(g.x) = (g^{-1}g).x = e.x = x$$

より $g^{-1} \in G_x$. また $g_1, g_2 \in G_x$ なら $g_1.(g_2.x) = g_1.x = x$ なので $g_1g_2 \in G_x$. 以上より G_x は部分群.

(2) $x = g^{-1}.y$ に注意する. 実際, $g^{-1}.y = g^{-1}.(g.x) = e.x = x$ となる.
まず $G_y \subset gG_xg^{-1}$ を示す. $h \in G_y$ なら $h.y = y$ なので,

$$(g^{-1}hg).x = (g^{-1}hg).(g^{-1}.y) = g^{-1}.(h.y) = g^{-1}.y = x$$

となり, $g^{-1}hg \in G_x$ が分かる. これから $G_y \subset gG_xg^{-1}$ が従う.
次に $G_y \supset gG_xg^{-1}$ を示す. $h \in G_x$ なら $h.x = x$ なので,

$$(ghg^{-1}).y = (gh).(g^{-1}.y) = (gh).x = g.x = y$$

となり, $ghg^{-1} \in G_y$ が分かる. これから $G_y \supset gG_xg^{-1}$ が従う.

問題 10.2. (1) S_n は全単射の集合 $\mathrm{Aut}(X) = \{\sigma : X \to X \mid \text{全単射}\}$ を写像の合成を積として群とみなしたものである. よって任意の $x \in X$ と $\sigma, \tau \in S_n$ に対し $\sigma.(\tau.x) = \sigma.\tau(x) = \sigma(\tau(x)) = (\sigma\tau)(x)$ となる. また S_n の単位元は恒等写像 $e = \mathrm{id}_X$ なので, 任意の $x \in X$ に対し $e.x = \mathrm{id}_X(x) = x$ となる. これで $S_n \curvearrowright X$ が言えた.

(2) 任意の $x \in X$ に対して $O_{S_n}(x) = X$. 実際, 任意の 2 元 $x, y \in X$ に対し, $g \in S_n$ として互換

$$g = (x\,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & x & \cdots & y & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 1 & \cdots & y & \cdots & x & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

を取れば $y = g.x$ となる. よって任意の $y \in S_n$ について $y \in O_{S_n}(x)$ なので $O_{S_n}(x) = S_n$.

問題 10.3. (1) 任意の $x \in G$ に対し $e.x = ex = x$ となり, また任意の $x \in G$, $g, h \in G$ に対し $g.(h.x) = g(hx) = (gh)x = (gh).x$ となるので, $m : G \times G \to G$ は G の G 自身への左作用を定める.

(2) 任意の $x \in G$ に対して $O_G(x) = X$. 実際, 任意の $x, y \in G$ に対して $g := yx^{-1}$ とすれば $y = g.x$. あとは問題 10.2 (2) と同様.

[*1] 2018/06/28 版, ver. 0.2.

問題 10.4. (1) $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分群であることを示せば良い. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の単位元は単位行列 I_n で, これは $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ に含まれる. $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ なら $A \cdot {}^t A = I_n$ だが, 両辺の逆行列を取って ${}^t(A^{-1}) \cdot A^{-1} = I_n$. よって $A^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. また $A, B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ なら $(AB) \cdot {}^t(AB) = (AB) \cdot ({}^t B\, {}^t A) = A(B \cdot {}^t B){}^t A = A \cdot {}^t A = I_n$ となるので $AB \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. 以上より $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は部分群で, 特に群になる.

(2) 行列 (とベクトル) の乗法の結合則から $A.(B.x) = A.(Bx) = A(Bx) = (AB)x = (AB).x$ となり, また $I_n.x = x$ だから $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n$.

(3) $\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \pm\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$ と書けるので,

$$O_{\mathrm{O}_2(\mathbb{R})}\big({}^t(1,0)\big) = \{{}^t(\cos\theta, \pm\sin\theta) \mid 0 \le \theta \le 2\pi\} = \{{}^t(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad (\text{単位円}).$$

(4) $\mathrm{O}_3(\mathbb{R}) = \big\{ (p\ q\ r) \mid \{p, q, r\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底$\big\}$ と書けるので,

$$O_{\mathrm{O}_3(\mathbb{R})}\big({}^t(1,0,0)\big) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid |p| = 1\} = \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \quad (\text{単位球}).$$

問題 10.5. (1) $g, h \in G$ が $gG_x = hG_x$ を満たすなら $h^{-1}g \in G_x$ なので, $g.x = e.(g.x) = (hh^{-1}).(g.x) = h.((h^{-1}g).x) = h.x$. よって φ_x は well-defined.

(2) まず φ_x の全射性を示す. $O_G(x)$ の任意の元 y は, ある $g \in G$ を用いて $y = g.x$ と書ける. すると $\varphi_x(gG_x) = g.x = y$ となり, 全射性が示せた.
次に φ_x の単射性を示す. $\varphi_x(gG_x) = \varphi_x(hG_x)$ なら $g.x = h.x$ なので $gh^{-1} \in G_x$. よって $gG_x = hG_x$ となって示せた.

(3) φ_x が全単射なので $|G/G_x| = |O_G(x)|$. Legendre の定理から $|G| = |G_x| \cdot |G/G_x|$ なので $|G| = |G_x| \cdot |O_G(x)|$.

問題 10.6. (1) $z \in O_G(x) \cap O_G(y)$ とすると, ある $g, h \in G$ があって $z = g.x$, $z = h.y$ となる. すると $y = h^{-1}g.x$ だから $O_G(y) \subset O_G(x)$. 逆の包含関係も同様に示せる. よって $O_G(y) = O_G(x)$.

(2) X 上の二項関係 $\sim$ を $x \sim y \overset{\text{dfn}}{\iff} O_G(x) \cap O_G(y) \neq \emptyset$ で定義すると, これは同値関係.
実際, $O_G(x) \cap O_G(x) = O_G(X) \neq \emptyset$ より $x \sim x$, $O_G(x) \cap O_G(y) = O_G(y) \cap O_G(x)$ より $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ が言える. $x \sim y$ かつ $y \sim z$ なら $O_G(x) \cap O_G(y) \neq \emptyset$ かつ $O_G(y) \cap O_G(z) \neq \emptyset$ だが, (1) より $O_G(x) = O_G(y) = O_G(z)$. よって特に $O_G(x) \cap O_G(z) \neq \emptyset$ なので $x \sim z$. 以上で $\sim$ が同値関係であることが示せた.
そこで商集合 $X/\sim$ を考えて, その完全代表系を $\{x_i \mid i \in I\}$ とすれば, 商集合による類別から

$$X = \sqcup_{i \in I} C(x_i), \quad C(x_i) = \{x \in X \mid x \sim x_i\}.$$

ここで (1) より

$$C(x_i) = \{x \in X \mid O_G(x) \cap O_G(x_i) \neq \emptyset\} = \{x \in X \mid O_G(x) = O_G(x_i)\} = O_G(x_i).$$

よって $X = \sqcup_{i \in I} O_G(x_i)$ となる.
$|G|, |X| < \infty$ なら $|X| = \sum_{i \in I} |O_G(x_i)|$. さらに問題 10.5 より $|O_G(x_i)| = |G/G_x| = [G : G_x]$. よって $|X| = \sum_{i \in I} [G : G_x]$.

10.2 類等式

問題 10.7. 任意の $x \in G$ について $e.x = exe^{-1} = x$. また任意の $x \in G$ と $g, h \in G$ に対し $g.(h.x) = g.(hxh^{-1}) = ghxh^{-1}g^{-1} = (gh)x(gh)^{-1} = (gh).x$. よって共役作用で $G \curvearrowright G$ が定まっている.

問題 10.8. (1) $O_G(e) = \{g.e \mid g \in G\} = \{geg^{-1} \mid g \in G\} = \{gg^{-1} \mid g \in G\} = \{e\}$.

(2) 中心元の性質から $O_G(u) = \{g.u \mid g \in G\} = \{gug^{-1} \mid g \in G\} = \{gg^{-1}u \mid g \in G\} = \{u\}$.

問題 10.9. (1) 各 cycle type について 1 つ軌道がある. つまり

$$\begin{aligned}
O_{S_4}(e) &= \{e\}, \\
O_{S_4}\big((i\,j)\big) &= \{(1\,2), (1\,3), \dots, (3\,4)\} \qquad \text{(6 個の元からなる軌道)}, \\
O_{S_4}\big((i\,j\,k)\big) &= \{(1\,2\,3), (1\,3\,2), \dots, (2\,4\,3)\} \qquad \text{(8 個の元からなる軌道)}, \\
O_{S_4}\big((i\,j)(k\,l)\big) &= \{(1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}, \\
O_{S_4}\big((i\,j\,k\,l)\big) &= \{(1\,2\,3\,4), \dots, (1\,4\,3\,2)\} \qquad \text{(6 個の元からなる軌道)}.
\end{aligned}$$

(2) $24 = 1 + 6 + 8 + 3 + 6$ となって確かに類等式が成立している.

10.3 p 部分群と p-Sylow 部分群

問題 10.10. 各 $u \in M^G$ について $O_G(u) = \{u\}$ であり, また各 $v \in M \setminus M^G$ について $|O_G(v)| = [G : G_v] > 1$. G は p 群なので $[G : G_v]$ も p の冪であり, 1 より大きいから $p \mid [G : G_v]$.

$\{v_i \mid i \in I\} \subset M \setminus M^G$ を適当に選べば, M の軌道分解は

$$M = \Big(\bigsqcup_{u \in M^G} O_G(u)\Big) \sqcup \Big(\bigsqcup_{i \in I} O_G(v_i)\Big)$$

と書ける. 前半の議論より $|O_G(u)| = 1$ なので $|M| - |M^G| = \sum_{i \in I} |O_G(v_i)|$. 前半の議論より右辺は p の倍数. よって結論が得られる.

問題 10.11. G の自分自身への共役作用について $O_G(e) = \{e\}$ だから, $M = G \setminus \{e\}$ は共役作用で閉じている. よって作用 $G \curvearrowright M = G \setminus \{e\}$ は well-defined.

問題 10.10 より $|M| - |M^G|$ は p で割り切れる. $|M| = p^k - 1$ と書けるから, $|M^G| \neq 0$. $Z(G) = M^G \sqcup \{e\}$ なので $Z(G) \supsetneq \{e\}$.

問題 10.12. [*2] 問題 10.11 より $Z(G)$ は自明ではない. $Z(G) \subset G$ は部分群だから, $|Z(G)|$ は $|G|$ を割り切る. よって $|Z(G)| = p$ または p^2. $|Z(G)| = p^2$ であることが言えれば $Z(G) = G$ となって G が可換だと分かる.

そこで $|Z(G)| = p$ と仮定する. $Z(G)$ は素数位数の群なので巡回群. その生成元を 1 つ取って g と置く. $h \in G \setminus Z(G)$ とすると, 2 元 g, h で G は生成される. $g \in Z(G)$ だから g と h は可換であり, よって G の任意の 2 元は互いに可換である. すると $Z(G) = G$ となり $|Z(G)| < |G|$ と矛盾する. これで証明が終わった.

[*2] ver. 0.2 で修正しました.

問題 10.13. p-Sylow 部分群の個数を $k(p)$ とする. Sylow の定理の (2) より $k(p) \equiv 1 \pmod p$ かつ $k(p) \mid pq$. これらと仮定 $p > q$ より $k(p) = 1$. すると Sylow の定理の系から p-Sylow 部分群は正規部分群.

問題 10.14. q-Sylow 部分群の個数を $k(q)$ とする. Sylow の定理の (2) より $k(q) \equiv 1 \pmod q$ かつ $k(q) \mid pq$. これらから $k(q) = 1$ または p だが, 仮定 $p \not\equiv 1 \pmod q$ より $k(q) = 1$. すると Sylow の定理の系から q-Sylow 部分群は正規部分群.

問題 10.13 より, G の p-Sylow 部分群は巡回群 C_p と同型で正規部分群. 前半の議論から, G の q-Sylow 部分群も巡回群 C_q と同型で正規部分群. これらの部分群を同じ記号 C_p, C_q で書くことにする. 問題 10.18 より $C_pC_q \subset G$ は部分群.

$C_p \cap C_q = \{e\}$ に注意する. 実際, $C_p \cap C_q$ の元の位数は p の約数かつ q の約数なので 1. よって $|C_pC_q| = pq = |G|$ となり, $C_pC_q = G$. すると問題 10.17 より $G \simeq C_p \times C_q$.

最後に $C_p \times C_q \simeq C_{pq}$ より主張が得られる.

問題 10.15. G を位数 99 の群とする. Sylow の定理より, G の 3-Sylow 部分群の個数 $k(3)$ は $k(3) \equiv 1 \pmod 3$ かつ $k(3) \mid 99$ を満たすので $k(3) = 1$. 同様に 11-Sylow 部分群も 1 つになる. 以下, 3-Sylow 部分群を N_9 と書き, 11-Sylow 部分群を N_{11} と書く. Sylow の定理の系より $N_9, N_{11} \triangleleft G$ である.

$N_9N_{11} \subset G$ は問題 10.18 より部分群. 元の位数を考えると $N_9 \cap N_{11} = \{e\}$ なので, 問題 10.17 より $N_9N_{11} \simeq N_9 \times N_{11}$. また $|N_9N_{11}| = 99 = |G|$ なので $G \simeq N_9 \times N_{11}$. 問題 10.12 より N_9 は可換群で, N_{11} は素数位数なので巡回群だから, G は可換群である.

問題 10.16. 仮定から G の位数は $e \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ および p と互いに素な $q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ を用いて $|G| = p^e q$ と書ける. また商群 G/N の位数は $|G/N| = [G : N] \mid q$. よって $r := q/[G : N]$ とすれば $|N| = |G|/[G : N] = p^e r$. 特に N は p-Sylow 部分群 $S \subset N$ を持ち, $|S| = p^e$ となる. S は G の p-Sylow 部分群でもある. また任意 p-Sylow 部分群 $S' \subset G$ について, ある $g \in G$ があって $S' = g^{-1}Sg$. よって $S' = g^{-1}Sg \subset g^{-1}Ng = N$.

問題 10.17.
i) まず仮定から, 任意の $n_1 \in N_1$ と $n_2 \in N_2$ について $n_1n_2 = n_2n_1$ となることを示す. $N_i \triangleleft G$ から $n_1n_2n_1^{-1}n_2^{-1} = n_1(n_2n_1^{-1}n_2^{-1}) \in N_1$ かつ $n_1n_2n_1^{-1}n_2^{-1} = (n_1n_2n_1^{-1})n_2^{-1} \in N_2$ なので, $n_1n_2n_1^{-1}n_2^{-1} \in N_1 \cap N_2 = \{e\}$. よって示せた.

ii) 次に任意の $g \in G$ は $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$ によって $g = n_1n_2$ と一意的に表せることを示す. 表示できることは $N_1N_2 = G$ から従うから, 一意性のみ示せばよい. $n_1n_2 = n_1'n_2'$ ならば $n_1^{-1}n_1' = n_2(n_2')^{-1} \in N_1 \cap N_2 = \{e\}$ なので $n_1 = n_1'$ かつ $n_2 = n_2'$. よって示せた.

iii) 写像 $\varphi : N_1 \times N_2 \to G$, $(n_1, n_2) \mapsto n_1n_2$ が群の準同型であることに注意する. 実際,

$$\varphi((n_1, n_2) \cdot (n_1', n_2')) = \varphi((n_1n_1', n_2n_2')) = n_1n_1'n_2n_2' = n_1n_2n_1'n_2' = \varphi(n_1, n_2) \cdot \varphi(n_1', n_2')$$

となる. 但し i) で示した $n_1'n_2 = n_2n_1'$ を用いた.

iv) あとは φ が全単射であることを示せば良いが, これは ii) で示した.

問題 10.18. 部分群の 3 条件を確認する. $e = ee \in HK$ より最初の条件は成立. $K \triangleleft G$ より, 任意の $h_2 \in H$ と $k_1 \in K$ に対して $h_2^{-1}k_1h_2 \in K$ なので, $h_2^{-1}k_1h_2 = k' \in K$ と書ける. すると $(h_1k_1)(h_2k_2) = h_1h_2k'k_2 \in HK$. つまり HK は積で閉じている. 同様に $h_2k_1h_2^{-1} = k'' \in K$ と書けるので, $(h_2k_1)^{-1} = (k''h_2)^{-1} = h_2^{-1}(k'')^{-1} \in HK$. つまり HK は逆元を取る操作で閉じている.

以上です.