数学演習 VII・VIII　6 月 21 日分小テスト解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
`https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida`

問題. 以下の極限を求めよ. 但し積分は Lebesgue 積分の意味とする.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \Bigl(1+\frac{x}{n}\Bigr)^{-n} x^{-1/n}\,dx.$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n\cos x}{1+n^2x^{3/2}}\,dx.$

解答. (1) $f_n(x) := (1+x/n)^n$ とすると, $x \ge 0$ なら $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$. よって

$$f_n(x) \ \ge \begin{cases} 1 & (0 \le x \le 1) \\ f_2(x) \ = \ (1+x/2)^2 \ \ge \ x^2/4 & (1 \le x) \end{cases} \quad , \quad x^{1/n} \ \ge \begin{cases} \sqrt{x} & (0 \le x \le 1) \\ 1 & (1 \le x) \end{cases}$$

となる. 従って

$$F(x) \ := \begin{cases} 1/\sqrt{x} & (0 \le x \le 1) \\ 4/x^2 & (1 \le x) \end{cases}$$

とすれば, $F(x)$ は $(0,\infty)$ 上で可積分かつ $|(1+x/n)^{-n}x^{-1/n}| \le F(x)$. Lebesgue の収束定理 (優収束定理) より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \Bigl(1+\frac{x}{n}\Bigr)^{-n} x^{-1/n}\,dx \ = \ \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\Bigl[\Bigl(1+\frac{x}{n}\Bigr)^{-n} x^{-1/n}\Bigr]\,dx \ = \ \int_0^\infty e^{-x}\,dx \ = \ 1.$$

(2) $y = nx$ と変数変換すれば

$$\int_0^1 \frac{n\cos x}{1+n^2x^{3/2}}\,dx \ = \ \int_0^n \frac{\cos(n/y)}{1+n^{1/2}y^{3/2}}\,dy \ = \ \int_0^\infty \frac{\cos(n/y)}{1+n^{1/2}y^{3/2}}\,\chi_{(0,n)}(y)\,dy.$$

但し $\chi_{(0,n)}$ は区間 $(0,n) \subset \mathbb{R}$ の特性関数. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ について, 区間 $(0,\infty)$ 上で

$$\left|\frac{\cos(n/y)}{1+n^{1/2}y^{3/2}}\,\chi_{(0,n)}(y)\right| \ \le \ \frac{1}{1+y^{3/2}}$$

となることに注意する. 右辺の $(1+y^{3/2})^{-1}$ は $(0,\infty)$ 上で可積分なので, Lebesgue の収束定理 (優収束定理) より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n\cos x}{1+n^2x^{3/2}}\,dx \ &= \ \lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\cos(n/y)}{1+n^{1/2}y^{3/2}}\,\chi_{(0,n)}(y)\,dy \\ &= \ \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\Bigl(\frac{\cos(n/y)}{1+n^{1/2}y^{3/2}}\,\chi_{(0,n)}(y)\Bigr)\,dy \ = \ \int_0^\infty 0\,dy \ = \ 0.\end{aligned}$$

コメント. $2+3$ 点で採点しました. 平均点は 1.6 点でした.

(1) は単調収束定理が使えるのですが, $n \ge 2$ に関して単調減少であることを証明するのは少し面倒なので, 解答のように優収束定理を使うほうが易しいです.

以上です.

[*1] 2018/06/21 版, ver. 0.1.