

数学演習 VII・VIII 6月21日分解答*1

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)

yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp

<https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida>

9 曲線と曲面の幾何 2 (曲面の曲率)

9.1 曲面と面積分

問題 9.1. $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ と置くと,

$$\det \begin{pmatrix} F(p) \\ p' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} sa_1 + tb_1 & sa_2 + tb_2 & sa_3 + tb_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

となるので, 求める面積分の値は 0.

問題 9.2.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} F(p) \\ p' \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a^2 \cos^2 s & a^2 \sin^2 s \cos^2 t & a^2 \sin^2 s \sin^2 t \\ a \cos s \cos t & a \cos s \sin t & -a \sin s \\ -a \sin s \sin t & a \sin s \cos t & 0 \end{vmatrix} \\ &= a^4 (\sin^2 s \cos^2 s \cos^2 t + \sin^4 s \cos^2 t \sin t + \sin^3 s \cos s \sin^2 t). \end{aligned}$$

これを積分すると, t 積分で $\sin^3 s \cos s \sin^2 t$ の項だけが残って, 結果は $\pi a^4/4$.問題 9.3. $p_s = (a \cos s \cos t, a \cos s \sin t, -a \sin s)$, $p_t = (-a \sin s \sin t, a \sin s \cos t, 0)$ より

$$p_s \times p_t = (a^2 \sin^2 s \cos t, a^2 \sin^2 s \sin t, a^2 \cos s \sin s), \quad |p_s \times p_t| = a^2 \sin s.$$

これを積分して, 結果は $4\pi a^2$.問題 9.4. $p_s = (1, 0, f_s)$, $p_t = (0, 1, f_t)$ から $p_s \times p_t = (-f_s, -f_t, 1)$. $g := \sqrt{1 + f_s^2 + f_t^2}$ と置くと

$$A(S) = \iint |p_s \times p_t| ds dt = \iint g ds dt.$$

一方で $F(p) = (-f_s/g, -f_t/g, 1/g)$ から

$$\det \begin{pmatrix} F \\ p' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -f_s/g & -f_t/g & 1/g \\ 1 & 0 & f_s \\ 0 & 1 & f_t \end{vmatrix} = \frac{f_s^2 + f_t^2 + 1}{g} = g, \quad \int_S F \cdot dA = \iint g ds dt.$$

よって両者は一致する.

*1 2018/06/21 版, ver. 0.2.

9.2 曲率

問題 9.5. ^{*2} $p_u = (1, 0, 2au)$, $p_v = (0, 1, 2bv)$, $n = (-2au, -2bv, 1)/\sqrt{4a^2u^2 + 4b^2v^2 + 1}$, $p_{uu} = (0, 0, 2a)$, $p_{uv} = (0, 0, 0)$, $p_{vv} = (0, 0, b)$ より

$$I = \begin{pmatrix} 1 + 4a^2u^2 & 4abuv \\ 4abuv & 4b^2v^2 \end{pmatrix}, \quad II = \frac{1}{\sqrt{4a^2u^2 + 4b^2v^2 + 1}} \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}.$$

よって $(u, v) = (0, 0)$ では $I^{-1}II = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$ となって, $K = 4ab$, $H = a + b$.

問題 9.6. (1) $z = r^2(a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta)$.

(2) $y = f(x)$ で与えられる曲線の $(x, f(x))$ における曲率は $f''(x)/(1 + f'(x)^2)^{3/2}$. 今は $f_\theta(r) = cr^2$, $c := a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta$ となっているので,

$$\kappa(\theta) = \frac{f''(\theta)}{(1 + f'(\theta)^2)^{3/2}} = 2c = 2(a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta).$$

(3) $\kappa(\theta) = a + b + (a - b) \cos 2\theta$ なので, $\max = 2a$, $\min = 2b$, $\max \cdot \min = 4ab$, $(\max + \min)/2 = a + b$.

問題 9.7. $r := \sqrt{u^2 + v^2}$ と略記すると, $p_u = (1, 0, u/r)$, $p_v = (0, 1, v/r)$, $n = (-u/r, -v/r, 1)/\sqrt{2}$, $p_{uu} = (0, 0, v^2/r^3)$, $p_{uv} = (0, 0, -uv/r^3)$, $p_{vv} = (0, 0, u^2/r^3)$. よって

$$I = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} 2u^2 + v^2 & uv \\ uv & u^2 + 2v^2 \end{pmatrix}, \quad II = \frac{1}{\sqrt{2}r^3} \begin{pmatrix} v^2 & -uv \\ -uv & u^2 \end{pmatrix}, \quad I^{-1}II = \frac{1}{\sqrt{2}r^3} \begin{pmatrix} v^2 & -uv \\ -uv & u^2 \end{pmatrix}.$$

よって $K = 0$, $H = 1/2\sqrt{2(u^2 + v^2)}$.

問題 9.8. ^{*3} $p_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $p_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$, $n = (\sin v, -\cos v, u)/\sqrt{1 + u^2}$, $p_{uu} = (0, 0, 0)$, $p_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$, $p_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0)$ より

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + u^2 \end{pmatrix}, \quad II = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I^{-1}II = \begin{pmatrix} 0 & -(1 + u^2)^{-1/2} \\ -(1 + u^2)^{-3/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

よって $K = -(1 + u^2)^{-2}$, $H = 0$.

問題 9.9. $a := \tan u$, $b := \tan v$ とおくと $p_u = (1, 0, a)$, $p_v = (0, 1, -b)$, $n = (-a, b, 1)/\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$, $p_{uu} = (0, 0, 1 + a^2)$, $p_{uv} = (0, 0, 0)$, $p_{vv} = (0, 0, -1 - b^2)$ となるので

$$I = \begin{pmatrix} 1 + a^2 & -ab \\ -ab & 1 + b^2 \end{pmatrix}, \quad II = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} 1 + a^2 & 0 \\ 0 & 1 + b^2 \end{pmatrix}, \\ I^{-1}II = \frac{1}{(1 + a^2 + b^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} (1 + a^2)(1 + b^2) & -ab(1 + b^2) \\ ab(1 + a^2) & -(1 + a^2)(1 + b^2) \end{pmatrix}.$$

よって $K = -(1 + a^2)(1 + b^2)/(1 + a^2 + b^2)^2$, $H = 0$.

^{*2} ver. 0.2 で修正しました.

^{*3} ver. 0.2 で修正しました.

問題 9.10. (1) $p_u = (1 + v^2 - u^2, -2uv, 2u)$, $p_v = (2uv, v^2 - u^2 - 1, -2v)$, $n = (2u, 2v, u^2 + v^2 - 1)/(u^2 + v^2 + 1)$, $p_{uu} = (-2u, -2v, 2)$, $p_{uv} = (2v, -2u, 0)$, $p_{vv} = (2u, 2v, -2)$ となるので

$$I = (u^2 + v^2 + 1)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad I^{-1}II = (u^2 + v^2 + 1)^{-2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

よって $K = -4(u^2 + v^2 + 1)^{-4}$, $H = 0$.

(2) $|p_u \times p_v| = (u^2 + v^2 + 1)^2$ なので

$$A(S) = \int_{u^2+v^2 \leq R^2} (u^2 + v^2 + 1)^2 dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 + 1)^2 r dr d\theta = \frac{\pi}{3}((R^2 + 1)^3 - 1).$$

問題 9.11. (1) $p(u_0, v_0)$ での接平面の単位法線ベクトルが $n(u_0, v_0)$ なので, 内積の幾何学意味から主張が得られる.

(2) 簡単のため $h(u, v) = h$, $n(0, 0) = n_0$ 等と略記する. h の定義式を偏微分して $h_u = p_u \cdot n_0$, $h_v = p_v \cdot n_0$, $h_{uu} = p_{uu} \cdot n_0$, $h_{uv} = p_{uv} \cdot n_0$, $h_{vv} = p_{vv} \cdot n_0$. これらの式で $(u, v) = (0, 0)$ とすると $h_u(0, 0) = 0 = h_v(0, 0)$, $h_{uu}(0, 0) = L$, $h_{uv}(0, 0) = M$, $h_{vv}(0, 0) = N$. また定義から $h(0, 0) = 0$ なので, 関数 $h(u, v)$ の $(0, 0)$ での Taylor 展開は

$$\begin{aligned} h(u, v) &= h(0, 0) + h_u(0, 0)u + h_v(0, 0)v + \frac{1}{2}(h_{uu}(0, 0)u^2 + 2h_{uv}(0, 0)uv + h_{vv}(0, 0)v^2) + \cdots \\ &= \frac{1}{2}(Lu^2 + 2Muv + Nv^2) + \cdots \end{aligned}$$

以上です.