数学演習 VII・VIII 6 月 14 日分小テスト解答[*1]

担当: 柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida

問題. (1) 位数が素数である有限群は巡回群であることを証明せよ.

(2) 実一般線形群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (実数成分の n 次正則行列全体のなす群) と実特殊線形群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ を考える. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \triangleleft \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ であることを示し, また商群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ が乗法群 $\mathbb{R}^* = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ と同型であることを示せ.

解答. (1) G を位数が素数 p である有限群とする. Legendre の定理より, 任意の元 $g \in G$ の位数 $\mathrm{ord}(g)$ は $|G| = p$ の約数, つまり 1 か p. $\mathrm{ord}(g) = 1$ なら g は単位元. $|G| = p > 1$ より, そうでない元, つまり $\mathrm{ord}(g) = p$ となる元 $g \in G$ がある. この g が生成する部分群 $\langle g \rangle \subset G$ は, 位数 ord の定義より $|\langle g \rangle| = p$ を満たすから, G に一致する. よって G は g を生成元とする巡回群である.

(2) 行列式を取ることで定まる写像

$$\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*, \quad A \longmapsto \det(A)$$

を考えると, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ よりこれは群準同型.
$\mathbb{R}^*$ の単位元が 1 であることに注意して,

$$\mathrm{Ker}(\det) \;=\; (\det)^{-1}(1) \;=\; \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}).$$

一般に群の準同型写像の核は正規部分群だから, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は正規部分群.
また任意の $a \in \mathbb{R}^*$ に対し, 対角行列 $A = \mathrm{diag}(a, 1, \ldots, 1)$ は $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ かつ $\det(A) = a$ を満たすので, 準同型 det は全射.
以上の議論と準同型定理 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{Ker}(\det) \simeq \mathrm{Im}(\det)$ から $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*$ が得られる.

コメント. $2 + 3$ 点で採点しました. 平均点は 2.7 点でした.
基本的な問題ですので, 完答できるようにして下さい.

以上です.

[*1] 2018/06/14 版, ver. 0.1.