数学演習 VII · VIII　5 月 31 日分小テスト解答[*1]

問題. $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ を閉区間 $I = [s,t] \subset \mathbb{R}$ 上の連続関数とする．未知関数 $y(x)$ に関する n 次微分方程式

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\, y'(x) + a_n(x)\, y(x) \;=\; 0$$

の線形独立な解を $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ とする．I 上の関数 $W(x)$ を次の行列式で定義する．

$$W(x) \;:=\; \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

この時, 任意の $x \in I$ について次の等式が成立することを示せ.

$$W(x) \;=\; W(s) \exp\Big(-\int_s^x a_1(u)\, du\Big).$$

解答. $W(x)$ が次の微分方程式を満たすことを示せば良い.

$$\frac{dW}{dx}(x) \;=\; -a_1(x) W(x).$$

行列式の微分に関する性質

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11}' & \cdots & f_{1n}' \\ f_{21} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21}' & \cdots & f_{2n}' \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}' & \cdots & f_{nn}' \end{vmatrix} \qquad (*)$$

から

$$W' \;=\; \begin{vmatrix} y_1' & \cdots & y_n' \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

最後の行列式に $y_j^{(n)} = -\sum_{k=1}^n a_k(x) y_j^{(n-k)}(x)$ を代入し, 行列式の線形性を使うと

$$W'(x) \;=\; -\sum_{k=1}^n a_k(x) \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-k)} & \cdots & y_n^{(n-k)} \end{vmatrix} \;=\; -a_1(x) \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \;=\; -a_1(x) W(x).$$

コメント. W' を 1 つの行列式で書く所までを 2 点, 残りを 3 点で採点しました．平均点は 1.5 点でした.

$W(x)$ は **Wronski 行列式**もしくは **Wronskian** と呼ばれるもので, 理論的に重要 (解の存在定理や一意性定理の証明) であるばかりでなく, 実用的 (求積) にも大切ですので, 復習しておいて下さい．教科書 (金子晃著「微分方程式講義」サイエンス社) の §4.2, p. 106 あたりに関連した記述があります.

また行列式の微分に関する式 $(*)$ は重要ですので, 証明を含めて復習しておいて下さい.

以上です.

[*1] 2018/05/31 版, ver. 0.1.